Chapitre 4 : Trigonométrie

Table des matières

1 Le cercle trigonométrique

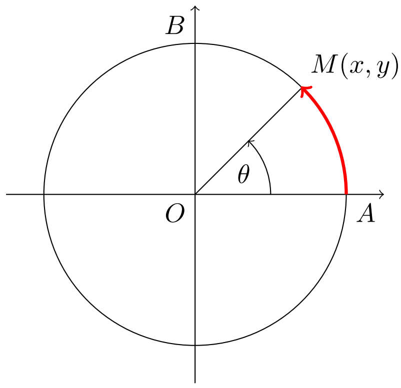
Définition 1.

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1.

$$\mathcal{C}(0,1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 = 1\right\}$$

On considère un repère orthonormé (O, A, B).
Soit $(x, y) \in \mathcal{C}(0,1)$. Pour le point M de coordonnées (x, y), on définit l'angle $\theta = \widehat{AOM}$ comme la longueur *algébrique* de l'arc de cercle entre A et M.

Les angles sont exprimés en radians.

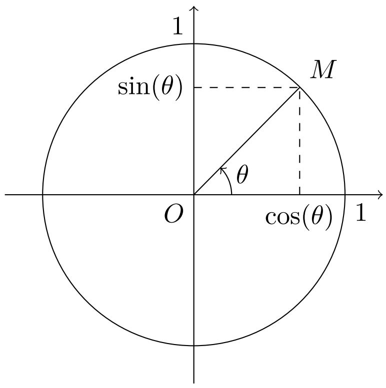


Remarque 2 : Pour mesurer un angle, on enroule sur le cercle une corde et on mesure la longueur nécessaire pour parcourir l'angle.

2 Fonctions cosinus et sinus

Définition 3.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
On note M le point du cercle trigonométrique correspondant à un angle de mesure θ.
On appelle cosinus de θ, noté $\cos(\theta)$, l'abscisse du point M.
On appelle sinus de θ, noté $\sin(\theta)$, l'ordonnée du point M.



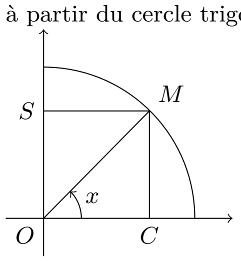
Théorème 4 (Théorème de Pythagore).

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$. On va appliquer le théorème de Pythagore à partir du cercle trigonométrique.

La triangle OMC est rectangle en O.
D'après le théorème de Pythagore,

$$OC^2 + CM^2 = OM^2$$
$$\Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$



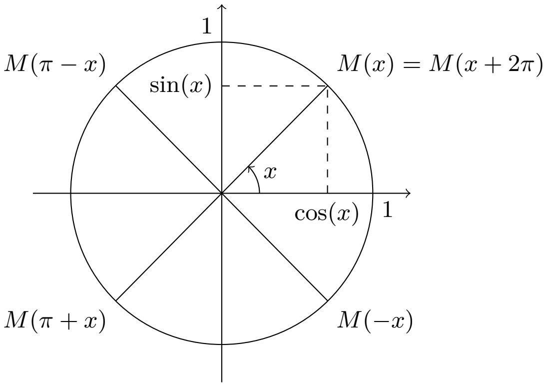
■

Théorème 5.

1. La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1;1]$:
$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos(x) \leq 1$$
2. La fonction cosinus est $2\pi-$périodique :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+2\pi) = \cos(x)$$
3. La fonction cosinus est paire :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos(x)$$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi - x) = -\cos(x)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi + x) = -\cos(x)$.

Démonstration : On va raisonner géométriquement. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Les points $M(x)$ et $M(x+2\pi)$ sont situés au même endroit sur le cercle.
- Les points $M(x)$ et $M(-x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- Les points $M(x)$ et $M(\pi-x)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- Les points $M(x)$ et $M(\pi+x)$ sont symétriques par rapport à l'origine.



■

Théorème 6.

1. La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1;1]$:
$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin(x) \leq 1$$
2. La fonction cosinus est $2\pi-$périodique :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$
3. La fonction cosinus est impaire :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin(x)$$
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi - x) = \sin(x)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

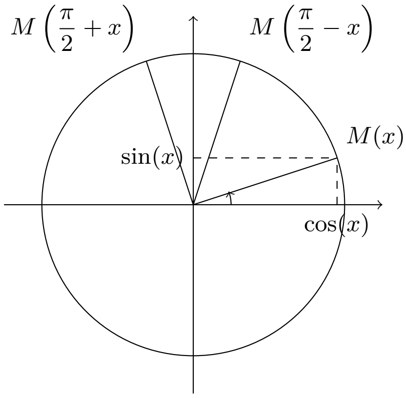
Démonstration : C'est le même raisonnement que le théorème précédent. ■

Théorème 7.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.

Démonstration : On va raisonner géométriquement. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Les points $M(x)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
- Les points $M\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

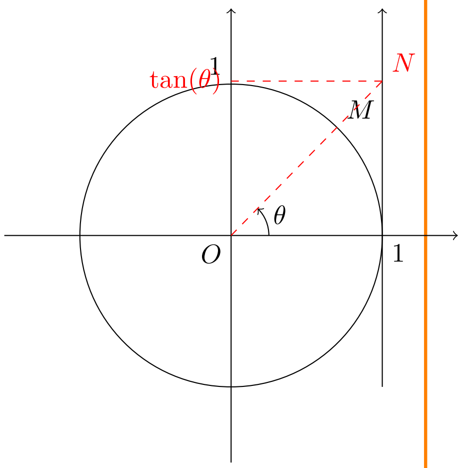


■

3 Fonction tangente

Définition 8.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
On note M le point du cercle trigonométrique correspondant à un angle de mesure θ.
On note N le point d'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$.
On appelle tangente de θ, noté $\tan(\theta)$, l'ordonnée du point N.



Théorème 9.

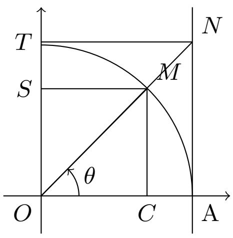
$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\},\ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Démonstration : On va appliquer le théorème de Thalès à partir du cercle trigonométrique.

- Les points O, C et A et O, M et N sont alignés dans le même sens.
- Les droites (MC) et (AN) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{AN}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\cos(\theta)}{1} = \frac{\sin(\theta)}{\tan(\theta)}$$
$$\Leftrightarrow \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$



■

Théorème 10.

1. La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction tangente est $\pi-$périodique :
$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \tan(x+\pi)=\tan(x)$$
3. La fonction tangente est impaire :
$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \tan(-x)=-\tan(x)$$
4. $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \tan(x+\pi)=\tan(x)$.
5. $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \tan(\pi-x)=-\tan(x)$.
6. $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan(x)}$.

Démonstration : On utilise les propriétés similaires pour cosinus et sinus. ■

4 Formules trigonométriques d'addition

Théorème 11.

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

1. $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.
2. $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$.
3. $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$.
4. $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$.

Démonstration : On démontre la première égalité en utilisant le produit scalaire. ■

Théorème 12 (Formule de l'angle double)**.**

Soit $x\in\mathbb{R}$.

1. $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=1-2\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1$.
2. $\sin(2x)=2\cos(x)\sin(x)$.

Démonstration : Soit $x\in\mathbb{R}$.

1. $\cos(2x)=\cos(x+x)=\cos(x)\cos(x)-\sin(x)\sin(x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$.
   On utilise ensuite $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1\Leftrightarrow\cos^2(x)=1-\sin^2(x)\Leftrightarrow\sin^2(x)=1-\cos^2(x)$.
   Finalement, $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=1-2\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1$.
2. $\sin(2x)=\sin(x+x)=\sin(x)\cos(x)+\cos(x)\sin(x)=2\cos(x)\sin(x)$. ■

5 Formules de linéarisation

Théorème 13.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.
2. $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

Démonstration : On repart du théorème précédent.

1. $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.
2. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \Leftrightarrow \sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. ■

Théorème 14.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

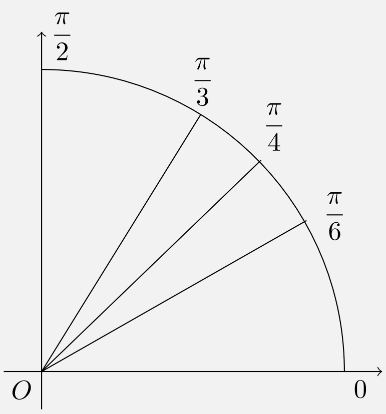
1. $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$.
2. $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$.
3. $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\big(\sin(a-b) + \sin(a+b)\big)$.

Démonstration : On utilise les formules du théorème 11. ■

6 Angles remarquables

Théorème 15.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



Démonstration : On va faire la démonstration pour $\dfrac{\pi}{4}$.

- Montrons d'abord que le cos et le sin ont la même valeur.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

- Déterminons ensuite sa valeur.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=1 &\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=1\\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Or, $0<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$.
Finalement, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Exemple 16 : Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

7 Equations trigonométriques

7.1 Arccos, arcsin et arctan

Théorème 17.

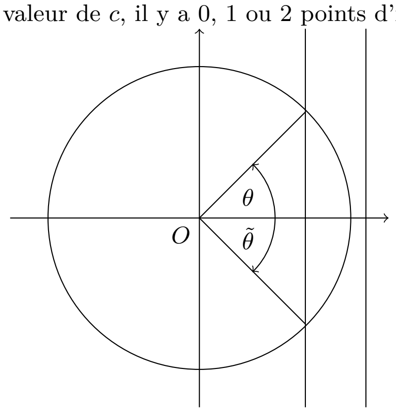
Soit $(c,s,t)\in\mathbb{R}^3$. Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

1. (a) Si $c\notin[-1;1]$, l'équation $\cos(\theta)=c$ n'admet pas de solution.
   (b) Si $c\in[-1;1]$, l'équation $\cos(\theta)=c$ admet une unique solution dans $[0;\pi]$.
   On la note $\theta=\arccos(c)$

   .
2. (a) Si $s\notin[-1;1]$, l'équation $\sin(\theta)=s$ n'admet pas de solution.
   (b) Si $s\in[-1;1]$, l'équation $\sin(\theta)=s$ admet une unique solution dans $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
   On la note $\theta=\arcsin(s)$.
3. L'équation $\tan(\theta)=t$ admet une unique solution dans $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
   On la note $\theta=\arctan(t)$.

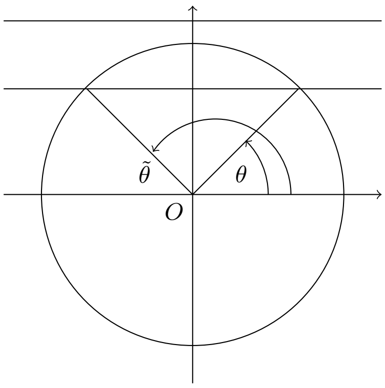
Démonstration :

1. On regarde l'intersection entre la droite d'équation $x=c$ et le cercle trigonométrique.
   Selon la valeur de c, il y a 0, 1 ou 2 points d'intersection.



(a) Si $c\notin[-1;1]$, il n'y a pas d'intersection.
(b) Si $c\in[-1;1]$, il y deux points d'intersection.
Un seul correspond à un angle dans le segment $[0;\pi]$.
C'est lui qu'on appelle $\arccos(c)$.

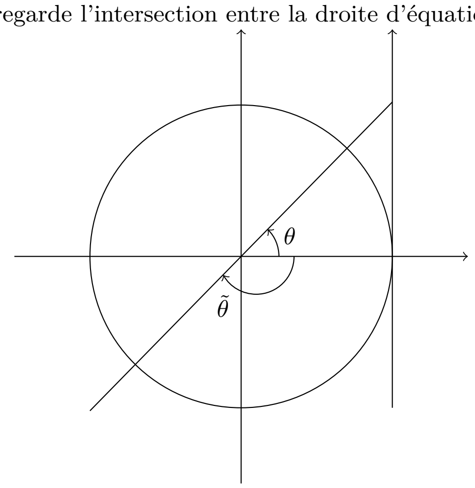
2. On regarde l'intersection entre la droite d'équation $y=s$ et le cercle trigonométrique.
   Selon la valeur de s, il y a 0, 1 ou 2 points d'intersection.



(a) Si $s \notin [-1;1]$, il n'y a pas d'intersection.

(b) Si $s \in [-1;1]$, il y deux points d'intersection.
Un seul correspond à un angle dans le segment $\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
C'est lui qu'on appelle $\arcsin(s)$.

3. On regarde l'intersection entre la droite d'équation $y = tx$ et le cercle trigonométrique.



Il y a deux points d'intersection.
Un seul correspond à un angle dans le segment $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
C'est lui qu'on appelle $\arctan(t)$.

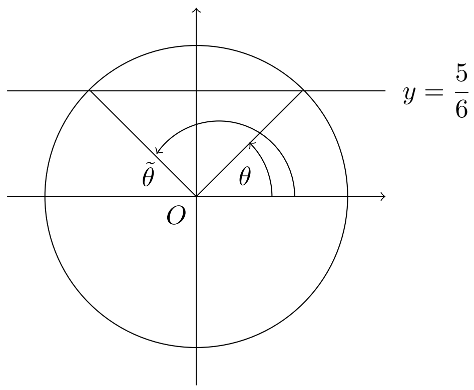
■

Remarque 18 : Soit $c \in [-1;1]$. L'ensemble des solutions de l'équation $\cos(\theta) = c$ est

$$S = \{\arccos(c) + 2k\pi, -\arccos(c) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple 19 : Résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{5}{6}$.

$\frac{5}{6} < 1$ donc l'équation admet une infinité de solutions.



Les deux solutions évidentes sont $\arcsin\left(\frac{5}{6}\right)$ et $\pi - \arcsin\left(\frac{5}{6}\right)$. Donc,

$$S = \left\{\arcsin\left(\frac{5}{6}\right) + 2k\pi, \pi - \arcsin\left(\frac{5}{6}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

7.2 Recherche de la phase

Exemple 20 : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner une autre expression de $G = \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)$.

On va utiliser la formule $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

$$\begin{array}{rcl} G & = & \cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) \\ & = & 2\left(\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right) \\ & = & 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(\theta) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(\theta)\right) \\ & = & 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \end{array}$$

Methode 1.

Soit $(A, B, \theta) \in \mathbb{R}^3$. Notons $G = A\cos(\theta) + B\sin(\theta)$. On va exprimer G sous la forme d'un cosinus.

- On calcule l'amplitude $r = \sqrt{A^2 + B^2}$.
- On factorise par r : $G = r\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\theta) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\theta)\right)$.
- On détermine un angle ϕ tel que $\cos(\phi) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin(\phi) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
- On utilise une formule de factorisation

$$G = r(\cos(\phi)\cos(\theta) + \sin(\phi)\sin(\theta)) = r\cos(\theta - \phi)$$

Exemple 21 : Résoudre l'équation $\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) = \frac{1}{2}$.

On commence par modifier l'expression de gauche.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) & = & 2\left(\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)\right) \\ & = & 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)\right) \\ & = & 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \end{array}$$

L'équation devient donc

$$\begin{array}{rcl} 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} & \Leftrightarrow & \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \\ & \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z},\ x - \frac{\pi}{6} = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{6} = -\arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \\ & \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{6} + \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} - \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2k\pi \end{array}$$