Exercice 1: Lister les ensembles suivants :

1. $E = \{x \in \mathbb{R} \setminus x^2 = 4\}$.

   $E = \{-2, 2\}$.

2. $E = \{x^2,\ x \in \{-1, 5, 12\}\}$.

   $E = \{1, 25, 144\}$.

3. $E = \{0, 2\}^3$

   $E = \{(0,0,0), (0,0,2), (0,2,0), (0,2,2), (2,0,0), (2,2,0), (2,0,2), (2,2,2), \}$

4. $E = \mathcal{P}(\{0, 1\})$.

   $E = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

Exercice 2: Soient A et B deux ensembles. Comparer A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$ en terme d'inclusion.

On a $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.

Exercice 3:

1. Donner un exemple de deux ensembles non vides dont l'intersection est vide.

   On peut prendre $A = \{-1, 2, 3\}$ et $B = \{-3, -2, 1\}$.

2. Donner un exemple de deux ensembles dont l'union est vide.

   On a $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

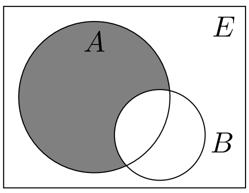
3. Est-ce le seul exemple possible ?

   Supposons qu'il existe A et B deux ensembles non tous les deux vides tels que $A \cup B = \varnothing$.
   Par les règles sur l'inclusion, $A \subset A \cup B$.
   Par définition de A et B, $A \subset \varnothing$.
   Or, $A \neq \varnothing$.
   C'est absurde donc de tels ensembles n'existent pas.

Exercice 4: Soient A et B deux ensembles. On note $A - B = \{x \in A,\ x \notin B\}$.

1. Représenter $A - B$.

   Soient A et B deux ensembles.

2. Ecrire $A - B$ à l'aide d'opérations sur les ensembles vus en cours.

   Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in A - B &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B} \end{aligned}$$

   Donc, $A - B = A \cap \overline{B}$.

3. Prouver que $A - B = A \Leftrightarrow B - A = B$.

   On peut raisonner par double implication.

$\underline{\Rightarrow}$: Supposons que $A - B = A$.
Pour montrer une égalité entre les deux ensembles, on va montrer une double inclusion.
$\underline{\subset}$: Par définition, on a bien $B - A \subset B$.
$\underline{\supset}$: Soit $x \in B$.
Donc, $x \notin A - B$. Donc, $x \notin A$ puisque, par hypothèse,$A - B = A$.
Donc, $x \in B - A$.
D'où $B \subset A - B$.
Par double inclusion, $B - A = B$.

$\underline{\Leftarrow}$: On mène le même raisonnement en inversant le rôle de A et de B.

On peut également raisonner par équivalence.

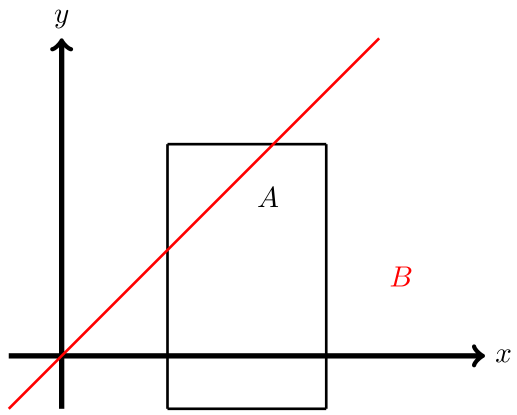
$$\begin{aligned} A - B = A &\Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \\ &\Leftrightarrow A \subset \overline{B} \\ &\Leftrightarrow B \subset \overline{A} \\ &\Leftrightarrow B \cap \overline{A} = B \\ &\Leftrightarrow B - A = B \end{aligned}$$

Pour le passage de la première à la deuxième ligne, on peut le démontrer de la façon suivante.
Soit $x \in A$. Donc, $x \in A \cap \overline{B}$ donc $x \in \overline{B}$. D'où, $A \subset \overline{B}$.

Exercice 5: On définit les deux ensembles suivants

$$A = [2;5] \times [-1;4] \text{ et } B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y \leq x\right\}.$$

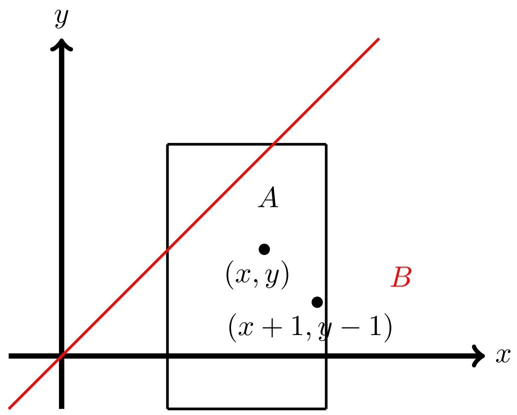
1. Représenter A et B.



2. Que pensez-vous de l'implication suivante ?

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \in A \Rightarrow (x+1, y-1) \in B$$

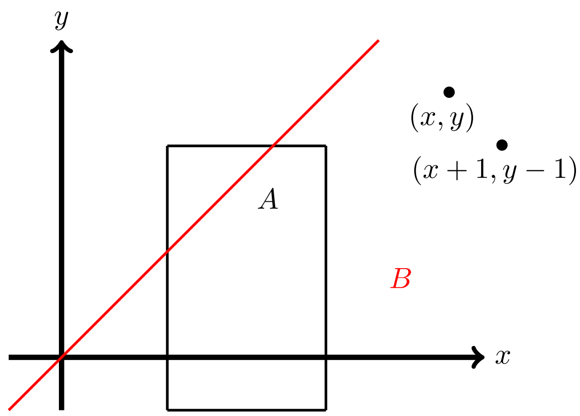
Soit $(x, y) \in A$.
On a donc $x \in [2;5]$ et $y \in [-1;4]$.
Donc, $x+1 \in [3;6]$ et $y-1 \in [-2;3]$.
Donc, $y-1 \leq x+1$. D'où $(x+1, y-1) \in B$.
Donc, l'implication est vraie.



3. Que pensez-vous de la réciproque ? On commencera par l'énoncer.

Voici la réciproque : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+1, y-1) \in B \Rightarrow (x, y) \in A$.
On va montrer qu'elle est fausse en proposant un contre-exemple.

Prenons $x = 7$ et $y = 5$. On a $y-1 \leq x+1$ donc $(x+1, y-1) \in B$.
Pourtant, $x \notin [2;5]$ donc $(x, y) \notin A$.



4. Montrer que $A \cap B \neq \varnothing$.

Le dessin nous en convainc mais ça ne constitue pas une preuve.
Prenons $x = 4$ et $y = -1$. On a $(x, y) \in A \cap B$ donc $A \cap B \neq \varnothing$.