Prénom :

Nom :

Interrogation $n°3$: Ensembles et Trigonométrie **B**

1 1. Soient E et F deux ensembles. Traduire avec des quantificateurs que $E = F$.

1 2. Soient E un ensemble. Rappeler la définition de E^5.

1 3. Rappeler la définition et les propriétés de la fonction sinus.

1,5 4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner les formules pour $\sin(x+\pi)$, $\sin(x-\pi)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

1,5 5. Soit $c \in [-1; 1]$. Donner la définition de $\arccos(c)$ et faire un dessin.

6. **Exercices**

   1 (a) Représenter $A = [-2; -1] \times [1; 3]$.

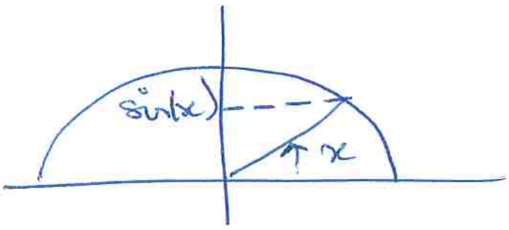
   1 (b) Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

   2 (c) Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

1) $\forall x \in E, x \in F$ et $\forall x \in F, x \in E$.

2) $E^5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \ / \ \forall i \in [\![1; 5]\!], x_i \in E\}$

3)



$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$.

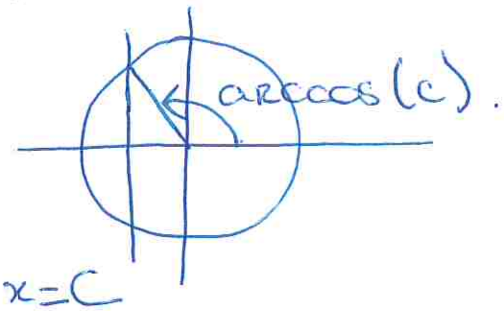
sin est impaire et 2π-périodique

4) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$.

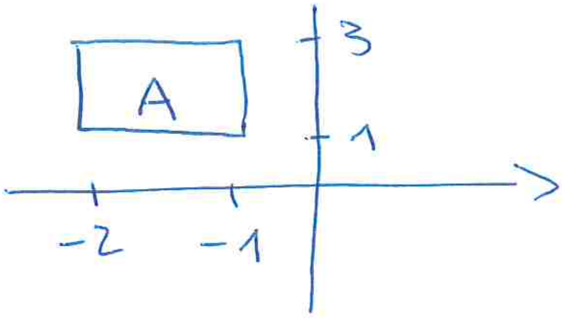
$\sin(x-\pi) = -\sin(\pi - x) = -\sin(x)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.

5) Soit $c \in [-1; 1]$. $\arccos(c)$ est l'unique angle de $[0; \pi]$ dont le cosinus vaut c.



6) a)



b) $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$

c) $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos(\pi/4)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Donc, $\left|\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ donc $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}}$

Prénom :

Nom :

Interrogation $n°3$: Ensembles et Trigonométrie A

1 1. Soient E et F deux ensembles. Traduire avec des quantificateurs que $E \subset F$.

1 2. Soient E et F deux ensembles. Rappeler la définition de $E \times F$.

1 3. Rappeler la définition et les propriétés de la fonction cosinus.

1,5 4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Énoncer les différentes expressions de $\cos(2x)$.

1,5 5. Soit $s \in [-1;1]$. Donner la définition de $\arcsin(s)$ et faire un dessin.

6. **Exercices**

   1 (a) Représenter $A = [-2;-1]^2$.

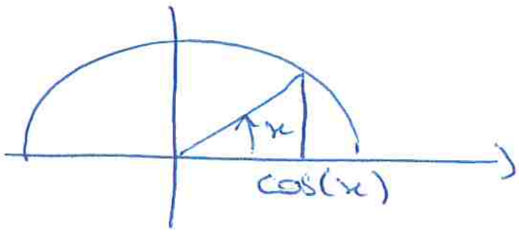
   1,5 (b) Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

   1,5 (c) Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

1) $\forall x \in E \ x \in F$.

2) $E \times F = \{(x,y) \ / \ x \in E, y \in F\}$

3)



cos est paire et 2π-périodique

$\forall x \in \mathbb{R}, \ -1 \leq \cos(x) \leq 1$

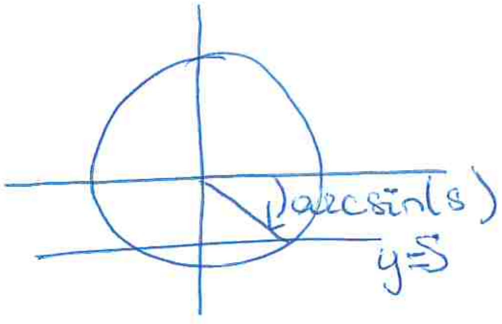
4) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$= 1 - 2\sin^2(x)$

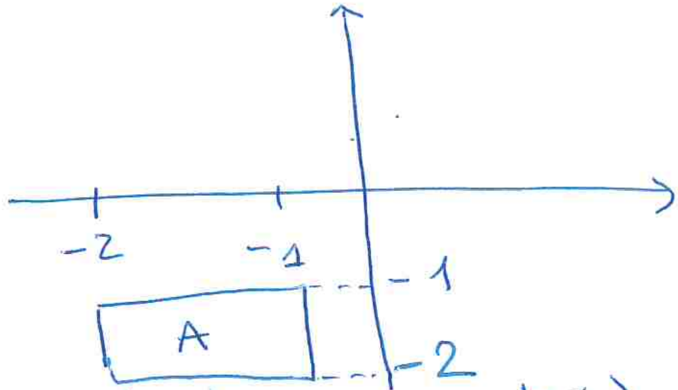
$= 2\cos^2(x) - 1$

5) Soit $s \in [-1, 1]$.

arcsin(s) est l'unique angle de $[-\frac{\pi}{2}, \pi/2]$ dont le sinus vaut s.



6) a)



b) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos(5\pi/6)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

donc $\left|\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right| = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

Or, $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) > 0$ donc $\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}}$.

c) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos(\pi/4)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

donc $\left|\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

Or, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ donc $\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}}$