Chapitre 5 : Calculs de sommes et de produits

Table des matières

1 Définitions et premiers exemples

1.1 Symbole $\sum$

Définition 1.

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m \leq n$. Soient $x_m, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.
La somme de tous les réels x_k pour k variant de m à n se note

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{n-1} + x_n$$

On trouve aussi les notations suivantes

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{m \leq k \leq n} x_k = \sum_{k \in [\![m,n]\!]} x_k$$

Exemple 2 :

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{12} 1 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 = 12.$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i = \underbrace{1}_{i=1} + \underbrace{2}_{i=2} + \underbrace{3}_{i=3} + \underbrace{4}_{i=4} + \underbrace{5}_{i=5} = 15.$

Remarque 3 :

1. Cette notation se lit comme dans une boucle `for` en informatique.
2. Par convention, lorsque $m > n$, la somme est vide et vaut 0.
3. Dans la somme, l'indice k est une **variable muette**.
4. En dehors de la somme, l'indice k n'existe pas.

Exemple 4 : Chercher l'erreur dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{k} x_k$.

L'entier k est à la fois l'indice muet e la somme et à la fois le dernier rang pour la somme.

1.2 Sommes usuelles

Théorème 5 (Somme de constantes)**.**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} a = na$$

Démonstration : Soit $a \in \mathbb{R}$. On raisonne par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) : \text{"} \sum_{k=1}^{n} a = na \text{"}$$

I Pour $n = 1$.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} a = a$ et $1 \times a = a$ donc $P(1)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a = \sum_{k=1}^{n} a + a \underset{\text{HR}}{=} na + a = (n+1)a$
Donc $P(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n)$ est vraie. ■

Théorème 6 (Somme des entiers de 1 à n)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration : On raisonne également par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) : \text{"}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\text{"}$$

I Pour $n = 1$.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\dfrac{1 \times 2}{2} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \underset{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
Donc $P(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n)$ est vraie. ■

Théorème 7 (Somme des carrés des entiers de 1 à n)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Démonstration : On raisonne également par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) : \text{"}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{"}$$

I Pour $n = 1$.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$ et $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \underset{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}.$
D'autre part,

$$\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n)$ est vraie. ■

Théorème 8 (Somme géométrique)**.**

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
2. Si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$.

Démonstration : On a besoin d'outils vus plus loin. ■

Exemple 9 : Soit $n \geq 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$$

2 Règles de calculs

2.1 Relation de Chasles

Théorème 10 (Relation de Chasles)**.**

Soit $(m, n, p) \in \mathbb{Z}^3$ avec $m \leq p \leq n$.
Soient $x_m, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{k=m}^{p} x_k + \sum_{k=p+1}^{n} x_k$$

Démonstration : Soit $(m, n, p) \in \mathbb{Z}^3$ avec $m \leq p \leq n$.
Soient $x_m, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = x_m + \cdots + x_n = x_m + \cdots + x_p + x_{p+1} + \cdots + x_n = \sum_{k=m}^{p} x_k + \sum_{k=p+1}^{n} x_k$$
■

Exemple 11 : Soit $n \geq 5$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \min(k, 5)$.

On va couper la somme à 5.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \min(k,5) &= \sum_{k=1}^{5} \min(k,5) + \sum_{k=6}^{n} \min(k,5) \\ &= \sum_{k=1}^{5} k + \sum_{k=6}^{n} 5 \\ &= \frac{5 \times 6}{2} + 5(n-6+1) \\ &= 5n - 10 = 5(n-2) \end{aligned}$$

Exemple 12 : Soit $n \geq 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

On va couper la somme selon que l'indice est pair ou impair.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor &= \sum_{\ell=1}^{n} \left\lfloor \frac{2\ell}{2} \right\rfloor + \sum_{\ell=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{2\ell+1}{2} \right\rfloor \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} \left\lfloor \ell + \frac{1}{2} \right\rfloor \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} \\
&= n^2
\end{aligned}$$

2.2 Linéarité

Théorème 13 (Linéarité)**.**

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n, y_m, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ une famille de réels. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} (x_k + y_k) &= \sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=m}^{n} y_k \\
\sum_{k=m}^{n} (\lambda y_k) &= \lambda \sum_{k=m}^{n} y_k
\end{aligned}$$

Démonstration : Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^3$ avec $m \leq p \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n, y_m, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{k=m}^{n} (x_k + y_k) = x_m + y_m + \dots + x_n + y_n = x_m + \dots + x_n + y_m + \dots + x_n = \sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=m}^{n} y_k$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda y_k) = \lambda y_m + \dots + \lambda y_n = \lambda (y_m + \dots + y_n) = \lambda \sum_{k=m}^{n} y_k$$

■

Exemple 14 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons $S = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)$.

Démonstration :

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2 \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^2$$

■

Exemple 15 : Soit $n \geq 1$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n} (8 - 2k + 6k^2)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (8 - 2k + 6k^2) &= \sum_{k=1}^{n} 8 - 2 \sum_{k=1}^{n} k + 6 \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= 8n - 2 \frac{n(n+1)}{2} + 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= 8n - n(n+1) + n(n+1)(2n+1) \\
&= 2n^3 + 2n^2 + 8n = 2n(n^2 + n + 8)
\end{aligned}$$

2.3 Sommes télescopiques

Théorème 16 (Sommes télescopiques)**.**

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{i=m}^{n} (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_m \quad , \quad \sum_{i=m}^{n} (x_i - x_{i+1}) = x_m - x_{n+1}$$

Démonstration :

$$\sum_{i=m}^{n} (x_{i+1} - x_i) = x_{m+1} - x_m + x_{m+2} - x_{m+1} + \cdots + x_n - x_{n-1} + x_{n+1} - x_n = x_{n+1} - x_m$$

■

Exemple 17 : Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

On a déjà démontré que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Théorème 18 (Somme géométrique)**.**

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n + 1$.

Démonstration :

1. Soit $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

$$\begin{aligned} S - qS &= \sum_{k=0}^{n} q^k - q \sum_{k=0}^{n} q^k \\ (1-q)S &= \sum_{k=0}^{n} \left(q^k - q^{k+1}\right) \\ &= 1 - q^{n+1} \\ S &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

2. Si $q = 1$, $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$.

■

2.4 Changement d'indice

Remarque 19 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 = 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \sum_{k=2}^{n+1} k^2$$

Exemple 20 : Proposer une autre écriture de $\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3$.

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 = \sum_{k=0}^{n-1}k^3$$

Methode 1 (Changement d'indice)**.**

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m \leq n$. Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

Le changement d'indice $j = k+1$ se fait en **3 étapes** :

$$k \in [\![m,n]\!] \underset{j=k+1}{\Leftrightarrow} j \in [\![m+1, n+1]\!]$$

1. Changement de l'indice inférieur de la somme : $k = m$ devient $j = m+1$
2. Changement de l'indice supérieur de la somme : $k = n$ devient $j = n+1$
3. Changement de l'indice dans le terme général : x_{k+1} devient x_j

$$\sum_{k=m}^{n} x_{k+1} = \sum_{j=m+1}^{n+1} x_j$$

Exemple 21 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une autre écriture de $\sum_{k=2}^{n+1} x_{k-2}$.

On applique le changement de variable $j = k-2 \Leftrightarrow k = j+2$.

1. La borne inférieure devient $j = 2-2 = 0$.
2. La borne supérieure devient $j = n+1-2 = n-1$.
3. Le terme général x_{k-2} devient $x_{j+2-2} = x_j$.

$$\sum_{k=2}^{n+1} x_{k-2} = \sum_{k=0}^{n-1} x_j$$

Théorème 22.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m \leq n$.

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n-m+1)a$$

Démonstration : On va faire commencer la somme à 1 pour appliquer le théorème 6.

On applique donc le changement de variable $j = k-m+1$.

1. La borne inférieure devient $j = m-m+1 = 1$.
2. La borne supérieure devient $j = n-m+1$.
3. Le terme général a devient a.

$$\sum_{k=m}^{n} a = \sum_{j=1}^{n-m+1} a = (n-m+1)a$$

■

Théorème 23.

Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

1. Si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = n - m + 1$.
2. Si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = q^m \frac{1 - q^{n-m+1}}{1-q}$.

Démonstration : Soit $q \in \mathbb{R}$. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$.

1. Si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$.
2. On va faire commencer les sommes à 0 pour appliquer le théorème 8.
   On applique donc le changement de variable $j = k - m$.
   - La borne inférieure devient $j = m - m = 0$.
   - La borne supérieure devient $j = n - m$.
   - Le terme général q^k devient $q^{j+m} = q^j.q^m$.

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \sum_{j=0}^{n-m} q^m.q^j = q^m \sum_{j=0}^{n-m} q^j = q^m.\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q}.$$

■

Théorème 24 (Symétrie des indices)**.**

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m \leq n$.
Soient $x_m, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{j=m}^{n} x_{n+m-j}$$

3 Sommes doubles

3.1 Définitions

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

k	1	2	...	n
	x_1	x_2	...	x_n

La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ peut se comprendre comme la somme des termes inscrits dans une ligne d'un tableau.

• Si le tableau contient deux lignes,

k	1	2	...	n
	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	...	$x_{1,n}$
	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	...	$x_{2,n}$

la somme de tous les éléments du tableau devient $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{1,k} + \sum_{k=1}^{n} x_{2,k}$.

• Si le tableau contient trois lignes,

k	1	2	...	n
	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	...	$x_{1,n}$
	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	...	$x_{2,n}$
	$x_{3,1}$	$x_{3,2}$	...	$x_{3,n}$

la somme de tous les éléments du tableau devient $S = \sum_{k=1}^{n} x_{1,k} + \sum_{k=1}^{n} x_{2,k} + \sum_{k=1}^{n} x_{3,k} = \sum_{\ell=1}^{3}\sum_{k=1}^{n} x_{\ell,k}$.

Théorème 25 (Somme sur un rectangle)**.**

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $(x_{j,k}, 0 \leq j \leq m,\ \ 0 \leq k \leq n)$ une famille de réels.

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\dots$	$x_{1,n}$
$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$\dots$	$x_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_{m,1}$	$x_{m,2}$	$\dots$	$x_{m,n}$

La somme de tous les éléments du tableau se note $\sum\limits_{\substack{0\leq j\leq m\\ 0\leq k\leq n}} x_{j,k}$ et on peut la calculer de deux façons.

- On additionne les termes de chaque colonne k, $\left(\sum\limits_{j=0}^{m} x_{j,k}\right)$ puis on additionne tout.

$$\sum_{\substack{0\leq j\leq m\\ 0\leq k\leq n}} x_{j,k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} x_{j,k}\right)$$

- On additionne les termes de chaque ligne j, $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_{j,k}\right)$ puis on additionne tout.

$$\sum_{\substack{0\leq j\leq m\\ 0\leq k\leq n}} x_{j,k} = \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n} x_{j,k}\right)$$

Exemple 26 : Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\sum\limits_{\substack{0\leq j\leq m\\ 0\leq k\leq n}} 2^{k+j}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{0\leq j\leq m\\ 0\leq k\leq n}} 2^{k+j} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} 2^{k+j}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(2^k\sum_{j=0}^{m} 2^{j}\right) = \sum_{k=0}^{n} 2^k.\frac{1-2^{m+1}}{1-2} \\
&= \left(2^{m+1}-1\right).\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = (2^{n+1}-1)(2^{m+1}-1)
\end{aligned}$$

Théorème 27 (Somme sur un triangle).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(x_{j,k}\ ,\ 0 \leq j \leq k \leq n)$ une famille de réels.

$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$\dots$	$\dots$	$x_{1,n}$
	$x_{2,2}$	$\dots$	$\dots$	$x_{2,n}$
		$x_{3,3}$	$\ddots$	$\vdots$
			$\ddots$	
				$x_{n,n}$

La somme de tous les éléments du tableau se note $\displaystyle\sum_{0\leq j\leq k\leq n} x_{i,j}$ et on peut la calculer de deux façons.

- On additionne les termes de chaque colonne k, $\displaystyle\left(\sum_{j=0}^{k} x_{j,k}\right)$ puis on additionne tout.

$$\sum_{0\leq j\leq k\leq n} x_{j,k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} x_{j,k}\right)$$

- On additionne les termes de chaque ligne j, $\displaystyle\left(\sum_{k=j}^{n} x_{j,k}\right)$ puis on additionne tout.

$$\sum_{0\leq j\leq k\leq n} x_{j,k} = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n} x_{j,k}\right)$$

Exemple 28 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leq j\leq k\leq n} \frac{j}{k}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq j\leq k\leq n} \frac{j}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} j\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.\frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right)\\
&= \frac{n(n+3)}{4}
\end{aligned}$$

4 Calculs de produits

4.1 Symbole $\prod$

Définition 29.

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m \leq n$. Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.
Le produit de tous les réels x_k pour k variant de m à n se note

$$\prod_{k=m}^{n} x_k = x_m \times x_{m+1} \times \cdots \times x_{n-1} \times x_n$$

On trouve aussi les notations suivantes

$$\prod_{k=m}^{n} x_k = \prod_{m \leq k \leq n} x_k = \prod_{k \in \llbracket m,n \rrbracket} x_k$$

Exemple 30 :

- $\prod_{i=1}^{12} 1 = 1$.
- $\prod_{i=1}^{5} i = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.
- $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \leq n \Rightarrow \prod_{k=m}^{n} a = a^{n-m+1}$.

Remarque 31 :

1. Cette notation se lit comme dans une boucle `for` en informatique.
2. Par convention, lorsque $m > n$, le produit est vide et vaut 1.
3. Dans le produit, l'indice k est une **variable muette**.
4. En dehors du produit, l'indice k n'existe pas.

4.2 Produits usuels

Théorème 32.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m \leq n$.

$$\prod_{k=m}^{n} a = a^{n-m+1}$$

Définition 33.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle factorielle de n et on note $n!$ le produit $n! = \prod_{i=1}^{n} i$.

Par convention, $0! = 1$.

Remarque 34 : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)! = n! \times (n+1)$.

4.3 Règles de calculs

Théorème 35 (Relation de Chasles).

Soit $(m,n,p) \in \mathbb{Z}^3$ avec $m \leq p \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

$$\prod_{k=m}^{n} x_k = \left(\prod_{k=m}^{p} x_k\right) \times \left(\prod_{k=p+1}^{n} x_k\right)$$

Théorème 36 (Multiplicativité).

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n, y_m, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ une famille de réels. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \prod_{k=m}^{n} (x_k . y_k) &= \prod_{k=m}^{n} x_k \times \prod_{k=m}^{n} y_k \\ \prod_{k=m}^{n} (\lambda y_k) &= \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} y_k \end{aligned}$$

Théorème 37 (Produits télescopiques).

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m \leq n$.
Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels **non nuls**.

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_m} \quad , \quad \prod_{k=m}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{x_m}{x_{n+1}}$$

Methode 2 (Changement d'indice).

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ avec $m \leq n$. Soient $x_m, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ une famille de réels.

Le changement d'indice $j = k+1$ se fait en **3 étapes** :

$$k \in [\![m,n]\!] \underset{j=k+1}{\Leftrightarrow} j \in [\![m+1, n+1]\!]$$

1. Changement de l'indice inférieur du produit : $k = m$ devient $j = m+1$
2. Changement de l'indice supérieur du produit : $k = n$ devient $j = n+1$
3. Changement de l'indice dans le terme général : x_{k+1} devient x_j

$$\prod_{k=m}^{n} x_{k+1} = \prod_{j=m+1}^{n+1} x_j$$

5 Coefficients binomiaux

5.1 Définitions et propriétés

Définition 38.

Soit n un entier naturel non nul et $k \leq n$.
On appelle coefficient binomial et on note $\binom{n}{k}$ l'entier défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Pour $k > n$ ou $k < 0$, par convention, $\binom{n}{k} = 0$.

Exemple 39 : $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\binom{n}{n} = 1$.

Théorème 40 (Symétrie des coefficients binomiaux)**.**

Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Démonstration : Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \leq n$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

■

5.2 Triangle de Pascal

Théorème 41.

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 < k \leq n$.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Démonstration : Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 < k \leq n$.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!k}{k(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

■

Remarque 42 : Avec cette formule, on peut calculer les coefficients binomiaux de proche en proche.

- Pour $n=0$ $\binom{0}{0}=1$.
- Pour $n=1$ $\binom{1}{0}=1$ et $\binom{1}{1}=1$.
- Pour $n=2$ $\binom{2}{0}=1$, $\binom{2}{1}=\binom{1}{1}+\binom{1}{0}=1+1=2$ et $\binom{2}{2}=1$.
- Pour $n=3$ $\binom{3}{0}=1$, $\binom{3}{1}=\binom{2}{1}+\binom{2}{0}=2+1=3$, $\binom{3}{2}=\binom{3}{1}=3$ et $\binom{3}{3}=1$.

Remarque 43 : On peut représenter les coefficients binomiaux dans un tableau. C'est sa forme triangulaire qui donne le nom de *Triangle de Pascal*.

$n \backslash p$	0	1	2	3	$\dots$	p
0	$\binom{0}{0}=1$					
1	$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=1$				
2	$\binom{2}{0}=1$	$\binom{2}{1}=2$	$\binom{2}{2}=1$			
3	$\binom{3}{0}=1$	$\binom{3}{1}=3$	$\binom{3}{2}=3$	$\binom{3}{3}=1$		
$\vdots$	$\vdots$					
n	$\binom{n}{0}=1$	$\binom{n}{1}=n$			$\binom{n}{p-1}$	$\binom{n}{p}$
$n+1$	$\binom{n+1}{0}=1$	$\binom{n+1}{1}=n+1$				$\binom{n+1}{p}$

Théorème 44.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad \forall\, k \leq n,\quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Démonstration : On raisonne par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) : \text{"}\forall k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \leq n, \binom{n}{k} \in \mathbb{N}\text{"}$$

I Pour $n=1$.
$\binom{1}{0}=0 \in \mathbb{N}$ et $\binom{1}{1}=1 \in \mathbb{N}$ donc $P(1)$ est vrai.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vrai. Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$.
Si $k=0$, $\binom{n+1}{0}=0 \in \mathbb{N}$.
Si $k=n+1$, $\binom{n+1}{n+1}=1 \in \mathbb{N}$.
Si $0<k<n+1$, par le triangle de Pascal, $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$.
Or, par hypothèse de récurrence, $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{k-1}$ sont des entiers. Donc, $\binom{n+1}{k}$ est aussi un entier.
Donc, $P(k+1)$ est vrai.

C Par le principe de récurrence, la propriété est vraie. ■

5.3 Binôme de Newton

Théorème 45.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On va raisonner par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) : \text{"}(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\text{"}$$

I Pour $n = 0$:
$\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = 1$ et $(a+b)^0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vrai.

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\
&= a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

On effectue le changement d'indice $\ell = k+1$ dans la première somme.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n-(\ell-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n+1-\ell} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \underbrace{\binom{n}{n} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)}}_{\ell=n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n+1-\ell} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{0} a^0 b^{n+1}}_{k=0} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \underbrace{\binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0}_{k=n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1}}_{k=0} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Donc, $P(k+1)$ est vrai.

C Par le principe de récurrence, la propriété est vraie. ■

Exemple 46 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Théorème 47.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = 0$$

Démonstration :

- On applique le binôme de Newton avec $a = b = 1$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k.1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

- On applique le binôme de Newton avec $a = 1$ et $b = -1$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k.1^{n-k} = (-1+1)^n = 0$$

■