Exercice 1: Calculer les expressions suivantes

1. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

   $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

   $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=0.$

3. $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

   $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$
   $=-\sqrt{3}+1-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-5}{\sqrt{3}}=\frac{3-5\sqrt{3}}{3}.$

Exercice 2: Soit $x\in\mathbb{R}$. Simplifier les expression suivantes

1. $\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

   $\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(x)-\sin(x)=0.$

2. $\cos(x-\pi)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)$.

   $\cos(x-\pi)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos(x)+\cos(x)=0.$

3. $\sin(-x)+\cos(\pi+x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

   $\sin(-x)+\cos(\pi+x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin(x)-\cos(x)+\cos(x)=-\sin(x).$

Exercice 3: Résoudre les équations et inéquations suivantes
d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

1. $\cos^2(x)=\frac{3}{4}$
2. $\sin(2x)=\frac{1}{2}$.
3. $\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=1$.
4. $|\sin(x)|>\frac{1}{2}$.
5. $|\tan(x)|<\sqrt{3}$.
6. $\sin(2x)=\sin(x)$.

7* $\cos(x)+\sin(x)=0$.

1. $\cos^2(x)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
   $\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ \ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$.
2. $\sin(2x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ \ 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.
   $\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\ \ x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$.
3. $\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)=1\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right)=1\Leftrightarrow 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(x)\right)=$
   $1.$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$.
$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x=2k\pi$ ou $x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$.

4. $|\sin(x)|>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x)>\frac{1}{2}$ ou $-\sin(x)>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x)>\frac{1}{2}$ ou $\sin(x)<-\frac{1}{2}$.
$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x\in\left]\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{7\pi}{6}+2k\pi;\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right[$.
5. $|\tan(\theta)|<\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}<\tan(\theta)<\sqrt{3} \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta\in\left]\frac{-\pi}{3}+k\pi;\frac{\pi}{3}+k\pi\right[$.
6. $\sin(2x)=\sin(x) \Leftrightarrow x=2x\ [2\pi]$ ou $x=\pi-2x\ [2\pi] \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x=2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$.
7. $\cos(x)+\sin(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)=0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.
$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Exercice 4: Déterminer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ puis $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

On remarque que $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ donc $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
Donc, $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
Or, $\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=1-\frac{6-2\sqrt{12}+2}{16}=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$
De plus, $\frac{5\pi}{12}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)>0$.
Donc, $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Exercice 5: Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

1. Rappeler la formule reliant $\cos(2\theta)$ et $\sin^2(\theta)$.
   $\cos(2\theta)=1-2\sin^2(\theta)$.
2. En déduire une expression de $\sin^2(\theta)$.
   On en déduit que $\sin^2(\theta)=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}$.
3. Déterminer $\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)$.
   On applique cette formule avec $\theta=\frac{9\pi}{8}$. Donc, $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$.
   Or, $\pi\leq\frac{9\pi}{8}\leq\frac{3\pi}{4}$ donc $\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)<0$ donc $\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

4. En déduire $\cos\left(\dfrac{9\pi}{8}\right)$.

$\cos^2\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) = 1 - \sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) = 1 - \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Or, $\pi \leq \dfrac{9\pi}{8} \leq \dfrac{3\pi}{4}$ donc $\cos\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) < 0$ donc $\cos\left(\dfrac{9\pi}{8}\right) = -\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Exercice 6: Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(3\theta)$ sous forme d'un polynôme en $\cos(\theta)$.

$\cos(3\theta) = \cos(\theta+2\theta) = \cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta) = \cos(\theta)[2\cos^2(\theta)-1] - \sin(\theta)\times 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
$= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2[1-\cos^2(\theta)]\cos(\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = \cos(\theta)[4\cos^2(\theta)-3]$.

2. Retrouver la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

On applique la formule précédente à $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\left[4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - 3\right] \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$ ou $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{4}$.
On retrouve la valeur connue.

Exercice 7: Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin^2(x) + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2$.

1. Déterminer une équation du second degré (E) dont $\cos(x)$ est solution.

$\sin^2(x) + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \Leftrightarrow 1 - \cos^2(x) + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \Leftrightarrow \cos^2(x) - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) + 1 = 0$.

Donc, $\cos(x)$ est solution de l'équation $(E) : y^2 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}y + 1 = 0$ ou encore $(E) : 2y^2 - 3\sqrt{2}y + 2 = 0$.

2. Résoudre l'équation (E).

Il s'agit d'une équation du second degré : $\Delta = 18 - 16 = 2 > 0$ donc il y a deux racines réelles
$y_1 = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$.

3. En déduire les solutions de l'équation initiale.

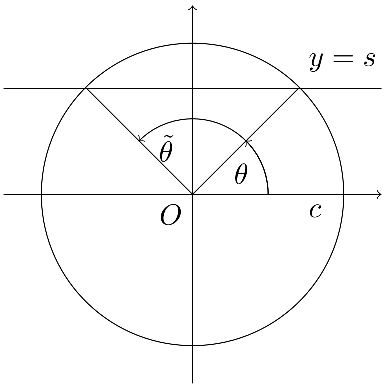
Donc, $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x) = \sqrt{2}$. La deuxième équation n'a pas de solution donc
$\sin^2(x) + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos(x) = 2 \Leftrightarrow \cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

Exercice 8: Soit $(a,b) \in \left]\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $a+b \neq \dfrac{\pi}{2}$ et $a+b \neq \dfrac{-\pi}{2}$.
Exprimer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} \\
&= \frac{\cos(a)\cos(b)\left[\dfrac{\sin(b)}{\cos(b)} + \dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}\right]}{\cos(a)\cos(b)\left[1 - \dfrac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}\right]} = \frac{\tan(b)+\tan(a)}{1-\tan(a)\tan(b)}
\end{aligned}$$

Exercice 9: Soit $s \in \mathbb{R}$. Donner, selon la valeur de s, toutes les solutions réelles de l'équation $\sin(x) = s$.

- Si $s \notin [-1;1]$, il n'y a pas de solution.
- Si $s \in [-1;1]$, il existe une unique solution dans $[0, \pi]$ que l'on note $\arcsin(s)$.



Donc, $\sin(x) = s \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\;\; x = \arcsin(s) + 2k\pi$ ou $x = \pi - \arcsin(s) + 2k\pi$.

Exercice 10: [*]

1. Soit $s \in [-1;1]$. Simplifier $\sin(\arcsin(s))$.

   $\arcsin(s)$ est l'unique solution dans $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation $\sin(x) = s$.
   Donc, $\sin(\arcsin(s)) = s$.

2. Soit $s \in [-1;1]$. Simplifier $\cos^2(\arcsin(s))$.

   $\cos^2(\arcsin(s)) = 1 - \sin^2(\arcsin(s)) = 1 - s^2$.

3. Résoudre l'équation $\arcsin(s) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$.

$$
\begin{aligned}
\arcsin(s) \quad &= \quad \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right) \Rightarrow s = \sin\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right). \\
&\Rightarrow \quad s = \sin\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right) + \cos\left(\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\right)\sin\left(\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right) \\
&\Rightarrow \quad s = \frac{4}{5}.\left|\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2}\right| + \left|\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}\right|.\frac{5}{13} \\
&\Rightarrow \quad s = \frac{4}{5}.\left|\sqrt{\frac{144}{13^2}}\right| + \left|\sqrt{\frac{9}{5^2}}\right|.\frac{5}{13} = \frac{4 \times 12}{5 \times 13} + \frac{3 \times 5}{5 \times 13} \\
&\Rightarrow \quad s = \frac{63}{65}
\end{aligned}
$$

Exercice 11:

1. Questions préliminaires :
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer, par un raisonnement par contraposition, la proposition P suivante :

$$P : \text{"} \sin(a) \neq 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\; \sin(\frac{a}{2^n}) \neq 0 \text{"}$$

   On commencera par exprimer clairement la contraposée de P.

   La contraposée de P est "$\exists n \in \mathbb{N}^*,\; \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = 0 \Rightarrow \sin(a) = 0$".

On raisonne par contraposée donc on suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = 0$.
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \dfrac{a}{2^n} = k\pi \Rightarrow a = 2^n k\pi \Rightarrow \sin(a) = 0$.

(b) Rappeler la formule de trigonométrie donnant $\sin(2x)$ pour tout réel x et l'appliquer pour $x = \dfrac{a}{2^{n+1}}$. On simplifiera les fractions au maximum.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
Si on l'applique à $x = \dfrac{a}{2^{n+1}}$, on obtient $\sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right) = 2\sin\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right)$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé tel que $\sin(a) \neq 0$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(n) : \text{"} \cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \text{"}$$

- Initialisation : Pour $n = 1$.
  $\sin(a) = 2\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{\sin(a)}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}$.
  Donc, $P(1)$ est vraie.
- Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
  On utilise le même formule de trigonométrie : $\cos\left(\dfrac{a}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}$.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) &= \left(\cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \\
&\underset{\text{HR}}{=} \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)} \\
&= \frac{\sin(a)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)}
\end{aligned}$$

- Conclusion : Par le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\frac{a}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a}{2^2}\right) \times \cdots \times \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(a)}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$$

.