

Exercice 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimez à l'aide des symboles Σ et $\prod$ les quantités suivantes

1. $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. $1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2n}$.
3. $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n - 2) \times 2n$
4. $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1) \times (2n + 1)$

1. $\sum_{k=3}^{10} k$.
2. $\sum_{k=0}^n a^{2k}$.

3. C'est le produit de tous les nombres pairs plus petits que $2n$ donc
 $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n - 2) \times 2n = \prod_{k=1}^n (2k) = 2^n \prod_{k=1}^n k = \boxed{2^n n!}$.

4. C'est le produit de tous les nombres impairs plus petits que $(2n + 1)$ donc
 $1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n - 1) \times (2n + 1) = \prod_{k=0}^n (2k + 1)$.

En fait, c'est le produit de tous les nombres plus petits que $(2n + 1)$ divisé par tous les nombres pairs plus petits que $2n$

$$\prod_{k=0}^n (2k + 1) = \frac{\prod_{k=0}^n (2k + 1)}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n + 1)!}{2^n n!}.$$

Exercice 2: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^n (2k - 1)$
2. $\sum_{k=4}^{n+1} (3k + 7)$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$
4. $\prod_{k=1}^n k e^k$.

1. $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2 \sum_{i=1}^n k - \sum_{i=1}^n 1 = 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$.

2. $\sum_{k=4}^{n+1} (3k + 7) = 3 \sum_{k=4}^{n+1} k + 7 \sum_{k=4}^{n+1} 1 = 3 \frac{(n+1-4+1)(n+1+4)}{2} + 7(n+1-4+1) = \frac{3(n-2)(n+5)}{2} + 7(n-3) = \frac{(n-2)(3n+29)}{2}$.

3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{2(1 - \frac{1}{2})} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1$.

4. $\prod_{k=1}^n k e^k = \prod_{k=1}^n k \prod_{k=1}^n e^k = n! \cdot e^{\sum_{k=1}^n k} = n! e^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice 3: Calculez la somme et le produit de tous les entiers pairs entre 1 et 100 puis la somme et le produit de tous les entiers impairs entre 1 et 100.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} (2k) &= 2 \sum_{k=1}^{50} k = 2 \cdot \frac{50(50+1)}{2} = 50 \times 51 = 2550 \\ \prod_{k=1}^{50} (2k) &= 2^{50} \prod_{k=1}^{50} k = 2^{50} \cdot 50! \end{aligned}$$

Exercice 4: Soit $(q, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes et les produits suivants :

1. $\sum_{k=1}^n k(k+1)$
2. $\sum_{k=1}^n q^k(1-q)$
3. $\prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k}$
4. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$
5. $\sum_{k=1}^n k \times k!$
6. $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{6} (n(2n+1) + 3n) \\
 & = \frac{n+1}{6} (2n^2 + 4n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \\
 2. \quad & \sum_{k=1}^n q^k(1-q) = \sum_{k=1}^n (q^k - q^{k+1}) = q - q^{n+1}. \\
 3. \quad & \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}. \\
 4. \quad & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \\
 5. \quad & \sum_{k=1}^n k \times k! = \sum_{k=1}^n (k+1-1)k! = \sum_{k=1}^n [(k+1)k! - k!] = \sum_{k=1}^n [(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1. \\
 6. \quad & \text{Soit } k \in \llbracket 2, n \rrbracket. \quad 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k} \frac{k+1}{k}. \\
 & \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \frac{k+1}{k} = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.
 \end{aligned}$$

Exercice 5: Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$.

1. A l'aide de formule de trigonométrie, exprimer $\cos(x)$ comme un quotient de sinus.

$$\left| \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \text{ donc } \cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2 \sin(x)}. \right.$$

2. Calculez $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

$$\left| \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}. \right.$$

Exercice 6: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$
2. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$
3. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2$
4. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (5i^2 - 18i^2j^2 + 5j^2)$

$$\begin{aligned}
1. \quad & \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n 1 = \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{(n - (i+1) + 1)}_{\text{nombre d'entiers entre } i+1 \text{ et } n} = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i \\
& = n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} \\
& \text{donc } \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}. \\
2. \quad & \sum_{1 \leq i, j \leq n} j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j = \sum_{i=1}^n \frac{n(n+1)}{2} = n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}. \\
3. \quad & \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i^2 + 2ij + j^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2ij + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j^2. \\
& \bullet \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{\text{formule sur les carrés}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j^2 = n \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}. \\
& \bullet \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}. \\
& \bullet \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right) = \left(\sum_{j=1}^n j \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
& \text{Finalement,} \\
& \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 = 2 \cdot \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{2} = \frac{2n^2(n+1)(2n+1) + 3n^2(n+1)^2}{6} \\
& = \frac{n^2(n+1)[2(2n+1) + 3(n+1)]}{6} = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}. \\
4. \quad & \sum_{1 \leq i, j \leq n} (5i^2 - 18i^2j^2 + 5j^2) = 5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^2 - 18 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^2j^2 + 5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j^2. \\
& = 10 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n i^2 - 18 \left(\sum_{j=1}^n j^2 \right)^2 = 10 \cdot \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} - 18 \cdot \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36} \\
& = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{2} \left(\frac{10}{3} - (n+1)(2n+1) \right).
\end{aligned}$$

Exercice 7: Résoudre l'équation suivante :

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n.$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = \frac{6n + 3n(n-1) + (n-2)(n^2-n)}{6} = \frac{n^3 + 5n}{6}.$$

Donc l'équation à résoudre est $n^3 + 5n = 20n$ c'est à dire $n(n^2 - 25) = 0$.

On cherche une solution strictement positive donc $n = 5$ est la seule solution au problème posé.

Exercice 8: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez les sommes suivantes :

$$\begin{aligned}
1. \quad & \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} & 3. \quad & \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1}. \\
2. \quad & \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} & 4. \quad & [*] \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

1. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} = (1+1)^n = 2^n.$
2. $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i 1^{n-i} = (1+(-1))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$
3. $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 3^{i-1} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 3^{i-1} \times 1 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} 3^i 1^{n-i} = \frac{1}{3} \left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 3^i 1^{n-i} - \underbrace{1}_{i=0} \right]$
 $= \frac{(3+1)^n - 1}{3} = \frac{4^n - 1}{3}.$
4. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}.$
 $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n+1}{l} = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l} - \binom{n+1}{0} \right]$
 $= \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1).$

Exercice 9: Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit $1 \leq k \leq n$. Démontrez que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$

$$\left| \begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1+1)!} \\ &= n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}. \end{aligned} \right|$$

2. Calculez $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}.$

$$\left| \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} = 2^{n-1}. \right|$$

3. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}.$

$$\left| \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{l=0}^{n-1} n \binom{n-1}{l} = n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} = n 2^{n-1}. \right|$$

Exercice 10: Soit $n \in \mathbb{N}^*.$

On définit $P = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $I = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$

1. Calculer $P + I$ et $P - I$.

On remarque d'abord que P correspond en fait à la somme des $\binom{n}{k}$ pour k pair inférieur à n et

I correspond à la somme des $\binom{n}{k}$ pour k impair inférieur à n . Ainsi, $I + P = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} = 2^n.$

De plus, $P - I$ correspond donc à la somme des $\binom{n}{k}$ avec un signe positif lorsque k est pair et négatif sinon.

$$\left| \text{Donc, } P - I = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} - \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} = \sum_{l=0}^n (-1)^l \binom{n}{l} = 0. \right.$$

2. En déduire I et P .

On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} P + I = 2^n \\ P - I = 0 \end{cases} \Rightarrow P = I = 2^{n-1}$$

Exercice 11:

1. Quel est le coefficient devant a^4b^2 dans le développement de $(a-b)^6$?

Par le binôme de Newton, $(a-b)^6 = \sum_{l=0}^6 \binom{6}{l} a^l (-b)^{6-l}$. Le coefficient en a^4b^2 correspond à $l=2$, c'est-à-dire $(-1)^2 \binom{6}{2} = 15$.

2. Quel est le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans $(a-b+2c)^9$?

Toujours par le binôme de Newton, $(a-b+2c)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (a-b)^{9-k} (2c)^k$.

On cherche le terme en c^3 donc on s'intéresse à $k=3$ c'est à dire $\binom{9}{3} 2^3 (a-b)^6$.

Le terme en $a^4b^2c^3$ est donné par celui devant a^4b^2 dans $(a-b)^6$.

Ce coefficient est donc $\binom{9}{3} 2^3 \binom{6}{2} = 10080$.

Exercice 12: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Simplifiez $\sum_{k=1}^n [(k+1)^4 - k^4]$.

2. En déduire $\sum_{k=0}^n k^3$.

Notons $S = \sum_{k=0}^n k^3$. S est aussi égal à $\sum_{k=1}^n k^3$.

1. $\sum_{k=0}^n (k+1)^4 - k^4 = (n+1)^4$ par la formule des sommes télescopiques.

2. $\sum_{k=0}^n (k+1)^4 - k^4 = \sum_{k=0}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) = 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1$.

Donc, $\sum_{k=0}^n (k+1)^4 - \sum_{k=0}^n k^4 = 4S + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + n + 1$.

Ainsi, $4S = (n+1)^4 - 6 \sum_{k=0}^n k^2 - 4 \sum_{k=0}^n k - (n+1) = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$

$= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) = n^2(n+1)^2$

Finalement, $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 13: [*] Soit $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$.

On pose $A_n = (a - b)^{2n} + (a + b)^{2n}$.

1. Calculez A_n .

On applique le binôme de Newton aux 2 termes de la somme :

$$\begin{cases} (a - b)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} a^k (-b)^{2n-k} \\ (a + b)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} a^k b^{2n-k} \end{cases} \Rightarrow (a - b)^{2n} + (a + b)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} a^k b^{2n-k} [(-1)^{2n-k} + 1]$$

Or, $(-1)^{2n-k} + 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ 2 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$

Finalement, il ne reste que les indices k pairs dans la somme c'est à dire quand $k = 2p$ avec $0 \leq p \leq n$.

$$\text{Donc, } (a - b)^{2n} + (a + b)^{2n} = \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} a^{2p} b^{2n-2p} \times 2 = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} (a^2)^p (b^2)^{n-p}.$$

2. En déduire que le réel $s_n = (1 - \sqrt{2})^{2n} + (1 + \sqrt{2})^{2n}$ est un entier naturel pair.

Pour calculer s_n , on applique la formule avec $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$.

$$s_n = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} (1^2)^p (\sqrt{2}^2)^{n-p} = 2 \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} 2^{n-p}$$

. C'est bien un entier naturel pair.

Exercice 14: Pour tout entier naturel non nul p et pour tout entier naturel n , on pose : $S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p$. L'objectif de ce problème est de calculer la somme $S_3(n)$ de trois manières différentes. Chacune des parties propose une méthode de calcul. Les parties sont indépendantes.

1. Rappeler sans démonstration, les expressions en fonction de l'entier naturel n , de $S_1(n)$ et $S_2(n)$.

2. **Démonstration par récurrence.**

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_3(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

3. **En exprimant $S_3(n)$ en fonction de $S_2(n)$ et $S_1(n)$.**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En effectuant un changement d'indice, exprimer, $\sum_{k=0}^n (k+1)^4$ en fonction de $S_4(n)$ et de n .

(b) Exprimer $\sum_{k=0}^n (k+1)^4$ en fonction de $S_4(n)$, $S_3(n)$, $S_2(n)$ et $S_1(n)$ (on pourra développer $(k+1)^4$).

(c) En déduire une expression de $S_3(n)$ en fonction de n .

4. **À l'aide d'une somme double**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que pour toute famille $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de réels : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^{k-1} a_{k,j} + \sum_{i=1}^k a_{i,k} \right]$
(indication : on pourra commencer par une relation de Chasles).

(b) Calculer $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij$ de deux manières.

En déduire $S_3(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$1. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$P_n : \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

• **initialisation** $\sum_{k=0}^0 k^3 = 0^3 = 0 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$. Donc P_0 est vraie.

• **hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que P_n soit vraie. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \text{ d'après } P_n \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) \text{ on reconnaît une identité remarquable :} \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2 \text{ donc } P_{n+1} \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

• **Conclusion** Ainsi, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_4(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3. **En exprimant $S_3(n)$ en fonction de $S_2(n)$ et $S_1(n)$.**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Posons $j = k+1$ dans la somme à calculer. On obtient :

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^4 = \sum_{j=1}^{n+1} j^4 = \sum_{j=1}^n j^4 + (n+1)^4 = \sum_{j=0}^n j^4 + (n+1)^4. \text{ Ainsi,}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (k+1)^4 = S_4(n) + (n+1)^4.}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ (d'après la formule du binôme). Donc $\sum_{k=0}^n (k+1)^4 = \sum_{k=0}^n k^4 + 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n (k+1)^4 = S_4(n) + 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + (n+1).$$

- (c) D'après les deux questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_4(n) + (n+1)^4 = S_4(n) + 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + (n+1).$$

Les $S_4(n)$ se simplifient, et on peut exprimer $S_3(n)$ en fonction des autres termes de la somme : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_3(n) = \frac{1}{4} \left((n+1)^4 - 6S_2(n) - 4S_1(n) - (n+1) \right).$$

D'où, en utilisant les expressions de $S_2(n)$ et $S_1(n)$, une expression de $S_3(n)$ en fonction de n :

$$S_3(n) = \frac{1}{4} \left((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \right).$$

Après simplification, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, S_3(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

4. À l'aide d'une somme double

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ des réels.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} + \sum_{j=i}^n a_{i,j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k-1} a_{k,j} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^{k-1} a_{k,j} + \sum_{i=1}^k a_{i,k} \right] \end{aligned}$$

- (b) Dans un premier temps, on remarque que les indices i et j sont indépendants et que l'expression sous la somme est un produit entre une quantité qui dépend de i et une qui dépend de j donc

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j \right) = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

On applique maintenant la formule démontrée à la question précédente.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij &= \sum_{k=1}^n \left[\sum_{j=1}^{k-1} kj + \sum_{i=1}^k ik \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[k \sum_{j=1}^{k-1} j + k \sum_{i=1}^k i \right] \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(k \cdot \frac{k(k-1)}{2} + k \frac{k(k+1)}{2} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n k^3
 \end{aligned}$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, S_3(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.