Prénom :
Nom :

Interrogation $n°$4bis : Trigonométrie et Sommes **A**

1. Soit $(n, x) \in \mathbb{N}\times]-1;1[$. Rappeler les formules suivantes.

1,5

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^{n}(-3) = -3(n+1)$	$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

2 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$. Déterminer une autre expression de $\sum_{k=3}^{n}(k-3)^2$ puis calculer la somme.

1 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

1 4. Soit $c \in [-1;1]$. Donner la définition de $\arccos(c)$.

5. **Exercices**

1,5 (a) Résoudre l'équation $\cos(x) = \cos(5x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2 (b) Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \frac{1}{4}$. Déterminer $\tan(x)$.

1 (c) Calculer la somme des entiers pairs entre 1 et 100.

2) $\sum_{k=3}^{n}(k-3)^2 = \sum_{k=0}^{n-3} k^2 = \frac{(n-3)(n-4)(2n-5)}{6}$

3) $\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k} = \boxed{\frac{n+1}{2}}$

4) L'équation $\cos(x) = c$ admet une unique solution sur $[0;\pi]$. On la note $\arccos(c)$.

5) a) $\cos(x) = \cos(5x) \iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = 5x + 2k\pi$ ou $x = -5x + 2k\pi$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z} / -4x = 2k\pi$ ou $6x = 2k\pi$.

$S = \left\{ \frac{-k\pi}{2}, \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $\cos^2(x) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$ Donc $|\cos(x)| = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Or, $\cos(x) \leq 0$ donc $\cos(x) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

Finalement, $\tan(x) = \frac{1}{4} \times \frac{-4}{\sqrt{15}} = \boxed{\frac{-\sqrt{15}}{15}}$

c) $\sum_{k=1}^{50}(2k) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{50} k = 2 \cdot \frac{50 \times 51}{2} = \boxed{2550}$

Prénom :

Nom :

Interrogation $n°$4bis : Trigonométrie et Sommes B

1 1. Soit $s \in [-1;1]$. Donner la définition de $\arcsin(s)$.

2. Soit $(n,x) \in \mathbb{N} \times]-1;1[$. Rappeler les formules suivantes.

1,5

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi} = \frac{n+1}{\pi}$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^k} = \frac{1-(1/x)^{n+1}}{1-1/x}$

2 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une autre expression de $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2$ puis calculer la valeur de la somme.

1 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\prod_{k=3}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

5. **Exercices**

1,5 (a) Résoudre l'équation $\sin(x) = \sin(4x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2 (b) Soit $x \in [0;\pi]$ tel que $\cos(x) = -\frac{1}{3}$. Déterminer $\tan(x)$.

1 (c) Calculer le produit des entiers impairs entre 1 et 100.

1) arcsin(s) est l'unique solution de $\sin(x) = s$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

3) $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{k=2}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 - 1 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - 1$

$= \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)-6}{6}$

$= \frac{2n^3+7n^2+6n+2n^2+7n}{6} = \frac{n(2n^2+9n+13)}{6}$

4) $\prod_{k=3}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=3}^{n}\frac{k-1}{k} = \boxed{\frac{2}{n}}$

5) a) $\sin(x) = \sin(4x) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x = 4x + 2k\pi$ ou $x = \pi - 4x + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / -3x = 2k\pi$ ou $5x = \pi + 2k\pi$

$S = \left\{ \frac{-2k\pi}{3}, \frac{\pi+2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

(b) $\sin^2(x) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Donc, $|\sin(x)| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Or, $\sin(x) \geq 0$ donc $\sin(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Finalement, $\tan(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times (-3) = \boxed{-2\sqrt{2}}$

(c) $\prod_{k=0}^{49} (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{100} k}{\prod_{k=1}^{50} (2k)} = \boxed{\frac{100!}{2^{50} \cdot 50!}}$