**Exercice 1** Donner les formes algébriques des complexes suivants :

1. $z = 1 + 2\mathbf{i} - 2 - 4\mathbf{i}$
2. $z = (1 + 2\mathbf{i})(2 - 4\mathbf{i})$
3. $z = (2 - 4\mathbf{i})^2$.
4. $z = (1 + 2\mathbf{i})^3$
5. $z = \dfrac{1 + 2\mathbf{i}}{2 - 4\mathbf{i}}$.
6. $z = \dfrac{1}{2\mathbf{i}}$
7. $z = \displaystyle\sum_{k=1}^{2022} \mathbf{i}^k$.

> 1. $z = 1 + 2\mathbf{i} - 2 - 4\mathbf{i} = -1 - 2\mathbf{i}$
> 2. $z = (1 + 2\mathbf{i})(2 - 4\mathbf{i}) = 10$
> 3. $z = (2 - 4\mathbf{i})^2 = -14 - 8\mathbf{i}$.
> 4. $z = (1 + 2\mathbf{i})^3 = 1 + 3(2\mathbf{i})^2 + 3(2\mathbf{i}) + (2\mathbf{i})^3 = 1 - 12 + 6\mathbf{i} - 8\mathbf{i} = -11 - 2\mathbf{i}$.
> 5. $z = \dfrac{1 + 2\mathbf{i}}{2 - 4\mathbf{i}} = \dfrac{(1 + 2\mathbf{i})(2 + 4\mathbf{i})}{(2 - 4\mathbf{i})(2 + 4\mathbf{i})} = \dfrac{-6 + 8\mathbf{i}}{20} = \dfrac{-3}{10} + \mathbf{i}\dfrac{2}{5}$.
> 6. $z = \dfrac{1}{2\mathbf{i}} = \dfrac{-2\mathbf{i}}{4} = \dfrac{-\mathbf{i}}{2}$
> 7. $z = \displaystyle\sum_{k=1}^{2022} \mathbf{i}^k = \mathbf{i}\frac{1 - \mathbf{i}^{2022}}{1 - \mathbf{i}}$.
>    Or, $i^4 = 1$ donc $i^{2022} = (i^4)^{505}.\mathbf{i}^2 = -1$.
>    Donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2022} \mathbf{i}^k = \frac{2\mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}} = \frac{2\mathbf{i}(1 + \mathbf{i})}{2} = -1 + \mathbf{i}$

**Exercice 2** On note $\mathbf{j} = \dfrac{-1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Calculer $\mathbf{j}^2$ puis $\mathbf{j}^3$.

   > $\mathbf{j}^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} = \bar{\mathbf{j}}$.
   > $\mathbf{j}^3 = \mathbf{j}.\mathbf{j}^2 = \mathbf{j}.\bar{\mathbf{j}} = |\mathbf{j}|^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = 1$.

2. Calculer $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2$.

   > $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = 1 + \dfrac{-1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{-1}{2} - \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{j}^n$.

   > Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   > - S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$ alors $\mathbf{j}^n = (\mathbf{j}^3)^k = 1$.
   > - S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 1$ alors $\mathbf{j}^n = (\mathbf{j}^3)^k.\mathbf{j} = \mathbf{j}$.
   > - S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 2$ alors $\mathbf{j}^n = (\mathbf{j}^3)^k.\mathbf{j}^2 = \mathbf{j}^2$.

4. En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{2021} \mathbf{j}^k$.

   > $\displaystyle\sum_{k=1}^{2021} \mathbf{j}^k = \mathbf{j}^1.\frac{1 - \mathbf{j}^{2021}}{1 - \mathbf{j}} = \mathbf{j}\frac{1 - \mathbf{j}^2}{1 - \mathbf{j}} = \mathbf{j} + \mathbf{j}^2 = -1$.

**Exercice 3** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. $z = \overline{z}$
2. $2z + 3\overline{z} = 1 - \mathbf{i}$.
3. $2\mathbf{i}z = 1 - z$
4. $2\overline{z} = 1 + 2\mathbf{i}$.

> $\forall z \in \mathbb{C},\ \exists (x, y) \in \mathbb{R},\quad z = x + \mathbf{i}y$.
>
> 1. $z = \overline{z} \Leftrightarrow x + \mathbf{i}y = x - \mathbf{i}y \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -y \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
> 2. $2z + 3\overline{z} = 1 - \mathbf{i} \Leftrightarrow 2x + 2\mathbf{i}y + 3x - 3\mathbf{i}y = 1 - \mathbf{i} \Leftrightarrow 5x - \mathbf{i}y = 1 - \mathbf{i} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 1 \\ -y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{5} + \mathbf{i}$.
> 3. $2\mathbf{i}z = 1 - z \Leftrightarrow z(1 + 2\mathbf{i}) = 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{1 + 2\mathbf{i}} \Leftrightarrow z = \dfrac{1 - 2\mathbf{i}}{5}$.
> 4. $2\overline{z} = 1 + 2\mathbf{i} \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1 + 2\mathbf{i}}{2} \Leftrightarrow z = \dfrac{1 - 2\mathbf{i}}{2}$.

**Exercice 4** Résoudre graphiquement les équations ou inéquations suivantes

1. $|z| = 2$
2. $|z| \leq 2$.
3. $2 < |z| \leq 5$.
4. $|z - 2| = 4$
5. $|z + 2\mathbf{i}| \leq 1$

> 1. $|z| = 2 \Leftrightarrow z \in C(0, 2)$
> 2. $|z| \leq 2 \Leftrightarrow z$ appartient au disque de centre 0 et de rayon 2 $D(0, 2)$.
> 3. $2 \leq |z| \leq 5 \Leftrightarrow z \in D(0, 5) \backslash D(0, 2)$ .
> 4. $|z - 2| = 4 \Leftrightarrow z \in C(2, 4)$
> 5. $|z + 2\mathbf{i}| \leq 1 \Leftrightarrow z$ appartient au disque de centre $-2\mathbf{i}$ et de rayon 1.

**Exercice 5** Donner la forme algébrique des complexes suivants :

1. $z = 2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}}$
2. $z = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}$.
3. $z = 3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} \times 2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$
4. $z = \dfrac{3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}}$

> On rappelle que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)$.
>
> 1. $z = 2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2\mathbf{i}$.
> 2. $z = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi} = \cos(\pi) = +\mathbf{i}\sin(\pi) = -1$.
> 3. $z = 3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}} \times 2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}} = 6\mathbf{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = 6\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}} = 6\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 3\sqrt{3} + 3\mathbf{i}$.
> 4. $z = \dfrac{3\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{3}{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{3}{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}} = \dfrac{3}{2}\mathbf{i}$.

**Exercice 6** Donner le module et un argument des complexes suivants puis la forme exponentielle.

1. $z = 4\mathbf{i}$
2. $z = -2$.
3. $z = \sqrt{3} + \mathbf{i}$
4. $z = 1 - \sqrt{3}\mathbf{i}$.
5. $z = \dfrac{1}{1 - \mathbf{i}}$.
6. $z = \dfrac{4\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$

> On commence par le module puis on reconnait un angle associé au point d'affixe $\dfrac{z}{|z|}$.

1. $|4\mathbf{i}| = 4$ et $\dfrac{4\mathbf{i}}{|4\mathbf{i}|} = \dfrac{4\mathbf{i}}{4} = \mathbf{i} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $4\mathbf{i} = 4\mathbf{e}^{i\frac{pi}{2}}$.
2. $|-2| = 2$ et $\dfrac{-2}{|-2|} = -1 = \cos(\pi) + \mathbf{i}\sin(\pi)$ donc $-2 = 2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}$.
3. $|\sqrt{3}+\mathbf{i}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ et $\dfrac{\sqrt{3}+\mathbf{i}}{|\sqrt{3}+\mathbf{i}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\dfrac{1}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ donc $\sqrt{3}+\mathbf{i} = 2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$.
4. $|1-\sqrt{3}\mathbf{i}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ et $\dfrac{1-\sqrt{3}\mathbf{i}}{|1-\sqrt{3}\mathbf{i}|} = \dfrac{1}{2} - \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{-\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)$ donc $1-\sqrt{3}\mathbf{i} = 2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{3}}$.
5. $\left|\dfrac{1}{1-\mathbf{i}}\right| = \left|\dfrac{1+\mathbf{i}}{2}\right| = \dfrac{|1+\mathbf{i}|}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{\frac{1}{1-\mathbf{i}}}{\left|\frac{1}{1-\mathbf{i}}\right|} = \dfrac{\frac{1+\mathbf{i}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1+\mathbf{i}}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$
   donc $\dfrac{1}{1-\mathbf{i}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$.
6. $\left|\dfrac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right| = \dfrac{|4\mathbf{i}|}{|1+\mathbf{i}|} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ et $\dfrac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = \dfrac{4\mathbf{i}(1-\mathbf{i})}{2} = 2\mathbf{i} + 2$.
   Donc, $\dfrac{\frac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}}{\left|\frac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right|} = \dfrac{2\mathbf{i}+2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ donc $\dfrac{4\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$.

**Exercice 7** Soient trois nombres complexes : $z_1 = -3 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ , $z_2 = \sqrt{2} + \mathbf{i}\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - \mathbf{i}\sqrt{8}$. On pose $Z = \dfrac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$.

1. Ecrire $z_1$, $z_2$ et $z_3$ sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ z_1 &= 2\sqrt{3}\left(\frac{-3}{2\sqrt{3}} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_2| &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ z_2 &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z_3| &= \sqrt{(\sqrt{8})^2 + \sqrt{8}^2} = \sqrt{16} = 4 \\ z_3 &= 4\left(\frac{\sqrt{8}}{4} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{8}}{4}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = 4\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{4}} \end{aligned}$$

2. En déduire une forme exponentielle de $Z$.

$Z = \dfrac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6} = \dfrac{(2\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{6}})^3 (4\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{4}})^4}{(2\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{3}})^6} = \dfrac{2^3.3\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{2}} 4^4 \mathbf{e}^{-\mathbf{i}\pi}}{2^6.2^3\mathbf{e}^{\frac{6\mathbf{i}\pi}{3}}} = -12\sqrt{3}\mathbf{e}^{\frac{5\mathbf{i}\pi}{2}}$

3. Déterminer la forme algébrique de $Z$.

$Z = -12\sqrt{3}i$.

**Exercice 8** Dans cet exercice, on note $w = \mathbf{e}^{\dfrac{2\mathbf{i}\pi}{5}}$, $a = w + w^4$ et $b = w^2 + w^3$.

1. Calculer $w^5$.

   $w^5 = \left(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}\right)^5 = 1.$

2. Exprimer $a$ et $b$ en fonction de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

   $$a = w + w^4 = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}} + \left(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}\right)^4 = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}} + \mathbf{e}^{\frac{8\mathbf{i}\pi}{5}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}(\mathbf{e}^{\frac{-3\mathbf{i}\pi}{5}} + \mathbf{e}^{\frac{3\mathbf{i}\pi}{5}}) = -2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

   La dernière égalité vient de $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

   $$b = w^2 + w^3 = (\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}})^2 + \left(\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}\pi}{5}}\right)^3 = \mathbf{e}^{\frac{4\mathbf{i}\pi}{5}} + \mathbf{e}^{\frac{6\mathbf{i}\pi}{5}} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\pi}(\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{5}} + \mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{5}}) = -2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

3. Exprimer $a + b + 1$ sous forme de somme et en déduire la valeur.

   $$a + b + 1 = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \sum_{k=0}^{4} w^k = \frac{1 - w^5}{1 - w} = 0$$

4. En déduire $a + b$ et $ab$.

   $a + b = -1.$
   $ab = (w + w^4)(w^2 + w^3) = w^3 + w^4 + w^6 + w^7 = w^3 + w^4 + w^5.w + w^5.w^2 = w^3 + w^4 + w + w^2 = -1.$

5. De quelle équation les complexes $a$ et $b$ sont-ils solutions ?

   $a$ et $b$ sont les deux solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.

6. Résoudre cette équation.

   $\Delta = 1 - (-4) = 5$. Il y a donc deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.
   Une de ces solutions est $a$ et l'autre est $b$.

7. En déduire $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ puis $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

   L'angle $\dfrac{2\pi}{5}$ est dans le premier cadran dons $a = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$ donc $a = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ et $b = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.
   On a donc

   $$\begin{aligned} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \\ \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \frac{(\sqrt{5} - 1)^2}{16} = 1 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{16} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} \end{aligned}$$

   Puisque l'angle $\dfrac{2\pi}{5}$ est dans le premier cadran, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est un nombre positif donc on peut passer à la racine carrée.

   $$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

**Exercice 9** Linéariser ou exprimer en fonction de puissances de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$ les expressions suivantes

1. $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$
2. $\sin^3(3\theta)$
3. $\cos(4\theta)$
4. $\sin(5\theta)$

1. On applique les formules d'Euler pour le cosinus et le sinus

$$\begin{aligned}
\sin^2(\theta)\cos^2(\theta) &= \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}\right)^2\left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}}{2}\right)^2\\
&= \left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}-2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{-4}\right)\left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+2\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{4}\right)\\
&= \left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}-2+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{-4}\right)\left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+2+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}}{4}\right)\\
&= \frac{\mathbf{e}^{4\mathbf{i}\theta}+2\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}-2\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}-4-2\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{2\mathbf{i}\theta}+2\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-4\mathbf{i}\theta}}{-16}\\
&= \frac{\mathbf{e}^{4\mathbf{i}\theta}+\mathbf{e}^{-4\mathbf{i}\theta}-2}{-16} = \frac{1-\cos(4\theta)}{8}
\end{aligned}$$

   On peut également retrouver ce résultat avec les formules de trigonométrie classiques.
   On sait que : $\forall\ \theta\in\mathbb{R},\ \sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$ et $\sin^2(\theta)=\dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$.
   donc $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)=\dfrac{1}{4}\sin^2(2\theta)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1-\cos(4\theta)}{2}=\dfrac{1-\cos(4\theta)}{8}$.

2. 

$$\begin{aligned}
\sin^3(3\theta) &= \left(\frac{\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}\right)^3\\
&= \frac{1}{-8\mathbf{i}}(\mathbf{e}^{9\mathbf{i}\theta}-3\mathbf{e}^{6\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}+3\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}\mathbf{e}^{-6\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-9\mathbf{i}\theta}) = \frac{1}{-8\mathbf{i}}(\mathbf{e}^{9\mathbf{i}\theta}-3\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}+3\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-9\mathbf{i}\theta})\\
&= \frac{1}{-8\mathbf{i}}(\mathbf{e}^{9\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-9\mathbf{i}\theta}-3(\mathbf{e}^{3\mathbf{i}\theta}-\mathbf{e}^{-3\mathbf{i}\theta})) = \frac{\sin(9\theta)-3\sin(3\theta)}{-4} = \frac{3\sin(3\theta)-\sin(9\theta)}{4}
\end{aligned}$$

3. Cette fois, on veut faire le travail dans l'autre sens et exprimer $\cos(4\theta)$ comme un polynôme en $cos(\theta)$.
   Pour cela, on utilise l'autre lien entre $\cos(\theta)$ et $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ : $\cos(\theta)=\mathrm{Re}(\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})$.

$$\begin{aligned}
\cos(4\theta) &= \mathrm{Re}(\mathbf{e}^{4\mathbf{i}\theta})=\mathrm{Re}((\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta})^4)=\mathrm{Re}[(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^4]\\
(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^4 &= \cos^4(\theta)+4\mathbf{i}\cos(\theta)\sin^4(\theta)-6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)-4\mathbf{i}\cos(\theta)\sin^3(\theta)+\sin^4(\theta)\\
\cos(4\theta) &= \cos^4(\theta)-6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)+\sin^4(\theta)\\
&= \cos^4(\theta)-6\cos^2(\theta)(1-\cos^2(\theta))+(1-\sin^2(\theta))^2\\
&= 8\cos^4(\theta)-8\cos^2(\theta)+1
\end{aligned}$$

4. On fait pareil et on utilise encore le binôme de Newton pour développer la puissance 5.

$$\begin{aligned}
\sin(5\theta) &= \mathrm{Im}[(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^5]\\
(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))^5 &= \cos^5(\theta)+5\mathbf{i}\cos^4(\theta)\sin(\theta)-10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)-10\mathbf{i}\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+5\cos(\theta)\sin^4\\
\sin(5\theta) &= 5\cos^4(\theta)\sin(\theta)-10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta)\\
&= 5(1-\sin^2(\theta))^2\sin(\theta)-10(1-\sin^2(\theta))\sin^3(\theta)+\sin^5(\theta)\\
&= 16\sin^5(\theta)-20\sin^3(\theta)+5\sin(\theta)
\end{aligned}$$

**Exercice 10** Résoudre les équations suivantes

1. $z^2 - 4z + 4 = 0$
2. $z^2 = -4$
3. $2z^2 + 3z - 5 = 0$.

> 1. $z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2$ donc l'équation admet une unique solution $z = 2$.
> 2. $z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 - (2\mathbf{i})^2 = 0 \Leftrightarrow (z - 2\mathbf{i})(z + 2\mathbf{i}) = 0 \Leftrightarrow z = 2\mathbf{i}$ ou $z = -2\mathbf{i}$.
> 3. $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 < 0$. L'équation admet deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-3 + \mathbf{i}\sqrt{31}}{4}$ et $z_2 = \dfrac{-3 - \mathbf{i}\sqrt{31}}{4}$.

**Exercice 11** [*] *Egalité du parallélogramme*
Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ |a|^2 + |b|^2 = \dfrac{1}{2}\left(|a-b|^2 + |a+b|^2\right)$.

> Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.
>
> $$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(|a-b|^2 + |a+b|^2\right) &= \frac{1}{2}\left((a-b)\overline{(a-b)} + (a+b)\overline{(a+b)}\right) = \frac{1}{2}\left((a-b)(\overline{a} - \overline{b}) + (a+b)(\overline{a} + \overline{b})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a\overline{a} - a\overline{b} - b\overline{a} + \overline{b}b + a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + \overline{b}b\right) = \frac{1}{2}\left(2|a|^2 + 2|b|^2\right) = |a|^2 + |b|^2 \end{aligned}$$

**Exercice** 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ 2\cos a \sin b = \sin(a+b) + \sin(b-a)$$

> Soient $a$ et $b$ deux réels.
> $\sin(a-b) + 2\cos a \sin b = \sin a \cos b - \sin b \cos a + 2\cos a \sin b = \sin a \cos b + \sin b \cos a = \sin(a+b)$

2. Simplifier
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}^{\mathbf{i}k\theta}.$$
*(on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de $\theta$)*

> Si $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = 1$, on a $\boxed{S_n = n+1}$.
>
> Sinon, d'après la formule de somme géométrique, $\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{e}^{\mathbf{i}k\theta} = \dfrac{1 - \mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta}}{1 - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}}}$

3. Déterminer la partie réelle de $S_n$.

On factorise par l'angle moitié au numérateur et au dénominateur.

$$\begin{aligned}
\frac{1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta}}{1-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}} &= \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta/2}\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{i}(n+1)\theta/2}-\mathbf{e}^{\mathbf{i}(n+1)\theta/2}\right)}{\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta/2}\left(\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta/2}-\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta/2}\right)} \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta/2}.\frac{-2\mathbf{i}\sin\left(\frac{(n+1)\theta)}{2}\right)}{-2\mathbf{i}\sin\left(\frac{\theta)}{2}\right)} \\
&= \mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta/2}.\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(S_n) &= \mathrm{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta/2}.\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\mathrm{Re}\left(\mathbf{e}^{\mathbf{i}n\theta/2}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

On applique ensuite la question préliminaire avec $a=\frac{n\theta}{2}$ et $b=\frac{(n+1)\theta}{2}$ et on obtient

$$\mathrm{Re}(S_n)=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

D'où, $\boxed{\text{Re}(S_n) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}}$.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \text{Re}\left(S_n\right)$ donc si $\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta} = 1$, on a $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = n+1}$.

Sinon, $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}}$.