

**Exercice 1** Donner les formes algébriques des complexes suivants :

1.  $z = 1 + 2i - 2 - 4i$
2.  $z = (1 + 2i)(2 - 4i)$
3.  $z = (2 - 4i)^2$ .
4.  $z = (1 + 2i)^3$
5.  $z = \frac{1 + 2i}{2 - 4i}$ .
6.  $z = \frac{1}{2i}$
7.  $z = \sum_{k=1}^{2022} i^k$ .

**Exercice 2** On note  $\mathbf{j} = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

1. Calculer  $\mathbf{j}^2$  puis  $\mathbf{j}^3$ .
2. Calculer  $1 + \mathbf{j} + \mathbf{j}^2$ .
3. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $\mathbf{j}^n$ .
4. En déduire  $\sum_{k=1}^{2021} \mathbf{j}^k$ .

**Exercice 3** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .

1.  $z = \bar{z}$
2.  $2z + 3\bar{z} = 1 - i$ .
3.  $2iz = 1 - z$
4.  $2\bar{z} = 1 + 2i$ .

**Exercice 4** Résoudre graphiquement les équations ou inéquations suivantes

1.  $|z| = 2$
2.  $|z| \leq 2$ .
3.  $2 < |z| \leq 5$ .
4.  $|z - 2| = 4$
5.  $|z + 2i| \leq 1$

**Exercice 5** Donner la forme algébrique des complexes suivants :

1.  $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$
2.  $z = e^{i\pi}$ .
3.  $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
4.  $z = \frac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

**Exercice 6** Donner le module et un argument des complexes suivants puis la forme exponentielle.

1.  $z = 4i$
2.  $z = -2$ .
3.  $z = \sqrt{3} + i$
4.  $z = 1 - \sqrt{3}i$ .
5.  $z = \frac{1}{1 - i}$ .
6.  $z = \frac{4i}{1 + i}$

**Exercice 7** Soient trois nombres complexes :  $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$  et  $z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$ . On pose  $Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$ .

1. Ecrire  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$  sous forme exponentielle.
2. En déduire une forme exponentielle de  $Z$ .
3. Déterminer la forme algébrique de  $Z$ .

**Exercice 8** Dans cet exercice, on note  $w = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ,  $a = w + w^4$  et  $b = w^2 + w^3$ .

1. Calculer  $w^5$ .
2. Exprimer  $a$  et  $b$  en fonction de  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  et  $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ .
3. Exprimer  $a + b + 1$  sous forme de somme et en déduire la valeur.
4. En déduire  $a + b$  et  $ab$ .
5. De quelle équation les complexes  $a$  et  $b$  sont-ils solutions ?
6. Résoudre cette équation.
7. En déduire  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  puis  $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .

**Exercice 9** Linéariser ou exprimer en fonction de puissances de  $\cos(\theta)$  et de  $\sin(\theta)$  les expressions suivantes

1.  $\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)$
2.  $\sin^3(3\theta)$
3.  $\cos(4\theta)$
4.  $\sin(5\theta)$

**Exercice 10** Résoudre les équations suivantes

1.  $z^2 - 4z + 4 = 0$
2.  $z^2 = -4$
3.  $2z^2 + 3z - 5 = 0$ .

**Exercice 11** [\*] *Egalité du parallélogramme*

Montrer que  $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,  $|a|^2 + |b|^2 = \frac{1}{2} (|a - b|^2 + |a + b|^2)$ .

**Exercice 12** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, 2 \cos a \sin b = \sin(a + b) + \sin(b - a)$$

2. Simplifier

$$S_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}.$$

(on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de  $\theta$ )

3. Déterminer la partie réelle de  $S_n$ .

4. En déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ .