BCPST 1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°2

Samedi 14 octobre 2023

– Sommes, produits - Trigonométrie –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Il est indispensable de toujours préciser quelle question ou sous-question vous êtes en train de traiter.

Les résultats essentiels, ainsi que les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés. N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 - Calculs

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$. Calculer les sommes et les produits suivants.
   (a) $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)(k+2)$.
   (b) $\mathrm{S} = \sum_{k=n}^{2n} x$.
   (c) $\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{n} 6(x^k - 2)$.
   (d) $\mathrm{P} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k}$.
   (e) $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{4^{n-k}}$.
2. Calculer $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^j$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4} = \sin^3(x)$.
   (b) En déduire une expression simplifiée de $\sum_{k=1}^{n} 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right)$.

Exercice 2.

On considère le réel $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vérifiant $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

1. (a) Justifier que l'assertion suivante est vraie :
$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 \leqslant 4^2 \Longleftrightarrow \sqrt{6}+\sqrt{2} \leqslant 4$$
   (b) En utilisant la question précédente, montrer que $\sqrt{6}+\sqrt{2} \leqslant 4$.
   (c) En déduire que le réel α est bien défini.
2. Calculer $\cos(2\alpha)$. En déduire α.
3. Montrer que $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
4. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation : (E) : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$.

Exercice 3.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right)$.

1. On suppose que $a = 1$. En déduire, pour tout entier n, la valeur de P_n.
2. On suppose maintenant que $a \neq 1$.
   (a) Calculer $(1-a)P_1$. En déduire la valeur de P_1.
   (b) Calculer $(1-a)P_2$. En déduire la valeur de P_2.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n.
   (d) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression pour P_n et la démontrer.

Problème.

Considérons la suite de fonctions polynomiales définie de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} & T_0(x) = 1, \\ & T_1(x) = x \\ & \forall n \in \mathbb{N}^*, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{aligned}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $T_n(x)$ pour $n \in \{2, 3, 4, 5\}$.
2. (a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\cos(n\theta)$.
   (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Déduire de la question précédente que,
   $$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
   Toute récurrence sera particulièrement soignée.
   (c) Calculer $T_n(-1)$ et $T_n(1)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser le résultat de la question précédente.
3. (a) Résoudre l'équation $\cos(5\theta) = 0$, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (c) En considérant la fonction polynomiale T_5 et la relation établie à la question 2b, montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est une solution de l'équation (E) : $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$
   (Dans cette question, on ne demande pas de résoudre l'équation (E)).
   (d) Résoudre l'équation (E) (on pourra poser $y = x^2$).
   (e) Classer les racines de l'équation (E) dans l'ordre croissant : $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ et montrer que $x_3 < \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (On pourra commencer par montrer que $x_3^2 < \frac{3}{4}$).
   (f) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.