

Exercice 1 - Calculs.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$.

$$(a) \quad S = \sum_{k=0}^n (k+1)(k+2) = \sum_{k=0}^n (k^2 + 3k + 2) = \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1).$$

$$S = (n+1) \left[\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{3n}{2} + 2 \right] = \boxed{\frac{(n+1)(n^2 + 5n + 6)}{3}}.$$

$$(b) \quad S = \sum_{k=n}^{2n} x = (2n - n + 1)x = \boxed{(n+1)x}.$$

$$(c) \quad S = \sum_{k=0}^n 6(x^k - 2) = 6 \sum_{k=0}^n x^k - 12 \sum_{k=0}^n 1 = \boxed{6 \cdot \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 12(n+1)}.$$

$$(d) \quad P = \prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k} = \prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k} = \prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k+1} \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+1}{1} = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}.$$

$$(e) \quad S = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{x^k}{4^{n-k}} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^k \cdot x^k = \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (4x)^k = \frac{1}{4^n} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (4x)^k - 1 \right] = \boxed{\frac{(4x+1)^n - 1}{4^n}}.$$

2.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^j &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n 2^j \right) = \sum_{i=1}^n \left(2^i \cdot \frac{1 - 2^{n-i+1}}{1 - 2} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2^i - 2^i \cdot 2^{n-i+1}}{-1} \right) = \sum_{i=1}^n (2^{n+1} - 2^i) \\ &= \sum_{i=1}^n 2^{n+1} - \sum_{i=1}^n 2^i = n \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = n \cdot 2^{n+1} + 2 - 2^{n+1} \end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^j = 2 + (n-1)2^{n+1}}.$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a)

$$\sin^3(\theta) = \sin^2(\theta) \cdot \sin(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \cdot \sin(\theta) = \frac{\sin(\theta) - \cos(2\theta) \sin(\theta)}{2}$$

Or, $\sin(\theta) \cos(2\theta) = \frac{\sin(3\theta) + \sin(-\theta)}{2}$. Donc,

$$\sin^3(\theta) = \frac{\sin(\theta) - \frac{\sin(3\theta) - \sin(\theta)}{2}}{2} = \frac{\sin(\theta)}{2} - \frac{\sin(3\theta)}{4} + \frac{\sin(\theta)}{4}$$

Finalement, $\boxed{\sin^3(\theta) = \frac{3 \sin(\theta) - \sin(3\theta)}{4}}.$

(b) On applique la formule précédente avec $x = \frac{\theta}{3^k}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 3^k \sin^3 \left(\frac{\theta}{3^k} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{3^k}{4} \left[3 \sin \left(\frac{\theta}{3^k} \right) - \sin \left(\frac{3\theta}{3^k} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left[3^{k+1} \sin \left(\frac{\theta}{3^k} \right) - 3^k \sin \left(\frac{\theta}{3^{k-1}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[3^{n+1} \sin \left(\frac{\theta}{3^n} \right) - 3^1 \sin \left(\frac{\theta}{3^{1-1}} \right) \right] \\ &\quad \quad \quad 1 \end{aligned}$$

Donc,
$$\sum_{k=1}^n 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^k}\right) = \frac{1}{4} \left[3^{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{3^n}\right) - 3 \sin(\theta) \right].$$

Exercice 2.

1. (a) On suppose que $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \leq 4^2$. On applique la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'où : $\sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} \leq \sqrt{4^2}$.

Or les nombres $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ et 4 sont positifs, donc $\sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ et $\sqrt{4^2} = 4$. Donc $\sqrt{6} + \sqrt{2} \leq 4$. Réciproquement, on suppose que $\sqrt{6} + \sqrt{2} \leq 4$. Ces nombres étant positifs, on peut appliquer la fonction carré, croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \leq 4^2$.

Ainsi, on a prouvé que :

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \leq 4^2 \iff \sqrt{6} + \sqrt{2} \leq 4$$

- (b) D'après la question précédente, il suffit de montrer que $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \leq 4^2$.

Or $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 6 + 2 + 2\sqrt{6}\sqrt{2} = 8 + 2\sqrt{12} = 8 + 4\sqrt{3}$.

Puisque $3 \leq 4$, en appliquant la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $\sqrt{3} \leq 2$. Donc $8 + 4\sqrt{3} \leq 8 + 4 \times 2$.

Ainsi, $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \leq 16$.

Puisque $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \leq 4^2$, on en déduit, d'après la question précédente, que $\sqrt{6} + \sqrt{2} \leq 4$.

- (c) Nous avons montré que $\sqrt{6} + \sqrt{2} \leq 4$. De plus ces nombres sont positifs. Donc, en divisant par $4 > 0$ on obtient : $0 \leq \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \leq 1$.

Puisque $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \in [-1, 1]$, on en déduit qu'il existe un réel α tel que $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

De plus, puisque ce nombre est positif, on peut choisir α dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Plus précisément, $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$.

2. Nous savons que $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$

Donc, d'après la question précédente, $\cos(2\alpha) = 2\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, $\cos(2\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Donc $\alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $\alpha = -\frac{\pi}{12} + k\pi$.

Puisque $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la seule valeur possible de α est $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

3. Nous savons que $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Donc $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$.

Donc $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$ ou $\sin \alpha = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$.

Or $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin(\alpha) \geq 0$. Donc $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}$.

Or $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{16} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$.

Puisque $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} > 0$, on en déduit que $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Donc $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

4. On reconnaît dans cette équation une expression du type $a \cos(x) + b \sin(x)$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On va

factoriser par $\sqrt{a^2 + b^2}$, ici $\sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{8 + 8} = 4$.

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2 &\iff \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} \cos x + \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} \sin x = \frac{2}{4} \\
 &\iff \cos(\alpha) \cos(x) + \sin(\alpha) \sin(x) = \frac{1}{2} \\
 &\iff \cos(x - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{K} : x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{K} : x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{K} : x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{12} + 2k\pi
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$S = \left\{ \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 3.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k})$.

1. On suppose que $a = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$P_n = \prod_{k=0}^n (1 + 1^{2^k}) = \prod_{k=0}^n 2 = 2^{n+1}. \text{ Donc, } \boxed{P_n = 2^{n+1}}.$$

2. On suppose maintenant que $a \neq 1$.

$$(a) \quad (1-a)P_1 = (1-a) \cdot \prod_{k=0}^1 (1 + a^{2^k}) = (1-a)(1 + a^{2^0})(1 + a^{2^1}) = (1-a)(1+a)(1+a^2) = (1-a^2)(1+a^2) = 1 - a^4.$$

$$\text{Donc, puisque } a \neq 1, \quad \boxed{P_1 = \frac{1 - a^4}{1 - a}}.$$

$$(b) \quad (1-a)P_2 = (1-a)P_1 \cdot (1 + a^{2^2}) = (1 - a^4)(1 + a^4) = 1 - a^8.$$

$$\text{Donc, puisque } a \neq 1, \quad \boxed{P_2 = \frac{1 - a^8}{1 - a}}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$P_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1} (1 + a^{2^k}) = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k}) \cdot (1 + a^{2^{n+1}}) = P_n \cdot (1 + a^{2^{n+1}})$$

$$\text{Donc, } \boxed{P_{n+1} = (1 + a^{2^{n+1}}) \cdot P_n}.$$

(d) On va démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n) : P_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}$.

I Pour $n = 0$:

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=0}^0 (1 + a^{2^k}) &= 1 + a^{2^0} = 1 + a. \\
 \frac{1 - a^{2^{0+1}}}{1 - a} &= \frac{1 - a^2}{1 - a} = \frac{(1+a)(1-a)}{1-a} = 1 + a.
 \end{aligned}$$

Donc, $P(0)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ soit vraie.

Par la question précédente, $P_{n+1} = (1 + a^{2^{n+1}}) \cdot P_n$.

$$\text{Par l'hypothèse de récurrence, } P_{n+1} = (1 + a^{2^{n+1}}) \cdot \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a} = \frac{(1 + a^{2^{n+1}}) \cdot (1 - a^{2^{n+1}})}{1 - a} = \frac{1 - (a^{2^{n+1}})^2}{1 - a}.$$

$$\text{Or, } (a^{2^{n+1}})^2 = a^{2 \cdot 2^{n+1}}. \text{ Donc, } P_{n+1} = \frac{1 - a^{2^{n+2}}}{1 - a}.$$

Finalement, $P(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a}$.

Problème.

1. On calcule les premiers termes de cette suite en utilisant la relation de récurrence et les deux premiers termes.

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = \boxed{2x^2 - 1}.$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = \boxed{4x^3 - 3x}.$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = \boxed{8x^4 - 8x^2 + 1}.$$

$$T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = \boxed{16x^5 - 20x^3 + 5x}.$$

2. (a) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés quelconque. On applique les formules de trigonométrie donnant le cosinus d'une somme :

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) &= \cos(n\theta + \theta) + \cos(n\theta - \theta) \\ &= \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta + \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta \\ &= 2 \cos n\theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos n\theta \cos \theta}.$$

- (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé quelconque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}(n) : T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

- $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies car $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0)$ et $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ par définition de T_0 et T_1 .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ soient vraies. Alors, d'après la relation de récurrence définissant la suite (T_n) ,

$$T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos(\theta) T_n(\cos(\theta)) - T_{n-1}(\cos(\theta)).$$

Or $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies, donc $T_{n+1}(\cos \theta) = 2 \cos(\theta) \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$. D'après la question précédente, on a donc $T_{n+1}(\cos \theta) = \cos((n+1)\theta)$, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.

- Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}.$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque. D'après la question précédente :

$$\boxed{\begin{aligned} T_n(-1) &= T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi) = (-1)^n \\ T_n(1) &= T_n(\cos(0)) = \cos(n \times 0) = 1 \end{aligned}}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} \cos(5\theta) = 0 &\iff \cos(5\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } 5\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Donc l'ensemble des solutions est } S = \left\{ \frac{\pi(1+4k)}{10}, \frac{\pi(-1+4k)}{10}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- (b) $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$. Donc, puisque la fonction cosinus est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}}.$

- (c) La relation établie à la question ?? donne, pour $n = 5$: $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_5(\cos \theta) = \cos(5\theta)$.

Donc, pour $\theta = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$, on obtient

$$T_5\left(\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Si on utilise l'autre expression de T_5 , on obtient

$$16 \cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20 \cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5 \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0$$

Or, $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0$. On en déduit : $16 \cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20 \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5 = 0$.

$$\boxed{\text{Donc } \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \text{ est une solution de l'équation (E) : } 16x^4 - 20x^2 + 5 = 0}.$$

(d) On pose $y = x^2$ dans l'équation (E).

$$\begin{aligned}
 (E) &\iff \begin{cases} y = x^2 \\ 16y^2 - 20y + 5 = 0 \text{ équation du 2d degré!} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \text{ ou } y = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \end{cases} \\
 &\iff x = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \\
 &\quad \text{car } \frac{5+\sqrt{5}}{8} > 0 \text{ et } \frac{5-\sqrt{5}}{8} > 0
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \right\}$$

(e) Nous avons vu que (E) admet 4 solutions deux à deux distinctes : deux solutions strictement positives et leurs opposés. On a :

$$-\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < -\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

De plus, $0 < 5 - \sqrt{5} < 6$ donc $0 < \frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{6}{8}$. Donc $0 < \frac{5-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{4}$. En appliquant la fonction $\sqrt{\cdot}$,

strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(f) Nous savons que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est solution de (E). Or nous avons explicité les solutions de (E) à la question ???. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est l'une des quatre valeurs trouvées à la question ??. Or $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$ et sur les quatre solutions obtenues au ???, trois sont strictement inférieures à $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc, par élimination, la seule

valeur possible de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est la dernière :

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}.$$