Exercice 1 Déterminer les limites suivantes

1. $f(x) = \dfrac{x+5}{x^2+1}$ en $+\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{x^5-x}{x^2-1}$ en $+\infty$.
3. $f(x) = \mathbf{e}^x - 2x + 1$ en $+\infty$.
4. $f(x) = 3x\mathbf{e}^{-x^2}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x+1}{\mathbf{e}^x-1}$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
7. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0.
8. $f(x) = \cos(5x)\mathbf{e}^{-3x}$ en $+\infty$.
9. $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{5x}$ en 0.
10. $f(x) = \dfrac{x\sin(x)}{x^2+1}$ en $+\infty$.
11. $f(x) = \mathbf{e}^{x-\sin(x)}$ en $+\infty$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\dfrac{x+5}{x^2+1} = \dfrac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$. Donc, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\dfrac{x^5-x}{x^2-1} = x^3.\dfrac{1-\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^2}}$. Donc, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\mathbf{e}^x - 2x + 1 = \mathbf{e}^x\left(1 - 2\dfrac{x}{\mathbf{e}^x} + \dfrac{1}{\mathbf{e}^x}\right)$.
   Par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathbf{e}^x} = 0$. Donc, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $3x\mathbf{e}^{-x^2} = 3.\dfrac{-x^2\mathbf{e}^{-x^2}}{-x}$.
   Or, $\lim_{X\to-\infty} X\mathbf{e}^X = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} -x^2\mathbf{e}^{-x^2} = 0$. Par quotient, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\dfrac{\mathbf{e}^x+1}{\mathbf{e}^x-1} = \dfrac{1+\mathbf{e}^{-x}}{1-\mathbf{e}^{-x}}$. Donc, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.
6. Il s'agit d'une forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$ où les deux termes tendent vers $+\infty$ avec la même vitesse. Aucune mise en facteur ne conviendra. On multiplie par la partie conjuguée.
   $\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} \times \dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}} = \dfrac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$.
   Or, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+x} + \sqrt{x-1} = +\infty$. Par quotient, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}) = 0}$.
7. On applique la même méthode.
   $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.
   Or, $\lim_{x\to0} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = 2$. Par quotient, $\boxed{\lim_{x\to0} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = 1}$.
8. On utilise un encadrement de la fonction cosinus.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq |\cos(5x)| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos(5x)\mathbf{e}^{-3x}| \leq \mathbf{e}^{-3x}$.
   Or, $\lim_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{-3x} = 0$. Par encadrement, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \cos(5x)\mathbf{e}^{-3x} = 0}$.
9. $\dfrac{\sin(2x)}{5x} = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{\sin(2x)}{2x}$. Or, $\lim_{X\to0} \dfrac{\sin(X)}{X} = 1$. Donc, par composition, $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{2x} = 1$.
   Par produit, $\boxed{\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(2x)}{5x} = \dfrac{2}{5}}$.
10. On va utiliser un encadrement de sin. $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq |\sin(x)| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left|\dfrac{x\sin(x)}{x^2+1}\right| \leq \dfrac{|x|}{x^2+1}$.
    Or, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$. Par encadrement, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin(x)}{x^2+1} = 0}$.
11. $\forall x \in \mathbb{R},\ x-1 \leq x - \sin(x) \Rightarrow \mathbf{e}^{x-1} \leq \mathbf{e}^{x-\sin(x)}$ par croissante sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle.
    Or, $\lim_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x-1} = +\infty$. Par minoration, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x-\sin(x)} = +\infty}$.

Exercice 2 Après avoir donné leur ensemble de définition et justifié leur dérivabilité, calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x\mathbf{e}^{-x^2}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x) - \sin(x)$.
3. $f(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x}{x^2+3}$.
4. $f(x) = \dfrac{1+\sin(2x)}{\cos(x)-3}$.
5. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$.
6. $f(x) = \ln(2+\cos(x))$
7. $g(x) = \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$
8. $h(x) = \sqrt{1+\ln(1-x)}$
9. $l(x) = \ln\left(\ln(x)\right)$

Correction

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée puis produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \mathbf{e}^{-x^2} + x.(-2x)\mathbf{e}^{-x^2} = (1-2x^2)\mathbf{e}^{-x^2}$$
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée puis somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{2}.2\cos(2x) - \cos(x) = \cos(2x) - \cos(x)$$
3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\mathbf{e}^x(x^2+3) - \mathbf{e}^x.2x}{(x^2+3)^2} = \frac{(x^2-2x+3)\mathbf{e}^x}{(x^2+3)^2}$$
4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas et
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= \frac{2\cos(2x)(\cos(x)-3) - (1+\sin(2x).(-\sin(x))}{(\cos(x)-3)^2} \\ &= = \frac{2\cos(2x)\cos(x) - 6\cos(2x) + \sin(x) - \sin(2x)\sin(x)}{(\cos(x)-3)^2}\end{aligned}$$
5. La fonction $x \mapsto 1+x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1,+\infty[$ et la fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée, la fonction $u : x \mapsto \ln(1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas et
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{\frac{2x}{1+x^2}.x - \ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$
6. $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ 2+\cos(x) > 0\}$. Or,
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ ,\ 1 \leq 2+\cos(x) \leq 3\end{aligned}$$
donc $D_f = \mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1,3]$ et d'une fonction dérivable sur $[1,3]$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin(x) \times \frac{1}{2+\cos(x)} = \frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$

7. $D_g = \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R}^*$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de la fonction $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de la fonction $x \mapsto \mathbf{e}^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = \frac{2}{x^3}\mathbf{e}^{\frac{-1}{x^2}}$$

8.
$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in \mathbb{R},\ 1-x>0 \text{ et } 1+\ln(1-x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R},\ x<1 \text{ et } \ln(1-x) \geq -1\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R},\ x<1 \text{ et } 1-x \geq \mathbf{e}^{-1}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R},\ x<1 \text{ et } x \leq 1-\mathbf{e}^{-1}\right\} \\ D_h &=]-\infty, 1-\mathbf{e}^{-1}] \end{aligned}$$

La fonction h est dérivable sur $]-\infty, 1-\mathbf{e}^{-1}[$ comme composée de la fonction $x \mapsto 1+\ln(1-x)$ dérivable sur $]-\infty, 1-\mathbf{e}^{-1}[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$et
$$\forall x \in]-\infty, 1-\mathbf{e}^{-1}[,\ h'(x) = \frac{-1}{1-x} \times \frac{1}{2\sqrt{1+\ln(1-x)}} = \frac{1}{2(x-1)\sqrt{1+\ln(1-x)}}$$

9. $D_l = \{x \in \mathbb{R},\ x>0 \text{ et } \ln(x)>0\} = \{x \in \mathbb{R},\ x>0 \text{ et } x>1\} =]1, +\infty[$.
La fonction l est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ dérivable sur $]1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :
$$\forall x \in]1, +\infty[,\ l'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$$

Remarque : Ceci nous dit aussi que la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 3 Soit $g : x \mapsto \dfrac{2x^3-2x-1}{x^3-1}$

1. Etudier la branche infinie de la fonction g.
Correction On est face à une forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$. On va modifier l'écriture de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
$$\forall x>1,\ g(x) = \frac{x^3(2-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^3(1-\frac{1}{x^3})} = \frac{2-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}$$
Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ donc par somme et quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$.
On a également $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 2$.
La droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à la courbe de g.
2. Déterminer la position de la courbe représentative de g par rapport à la branche infinie.
Correction Pour avoir la position de la courbe par rapport à son asymptote, on doit étudier le signe de la quantité $g(x)-2$ pour $x \in \mathbb{R}$.
$$\forall x>1,\ g(x)-2 = \frac{2-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} - 2 = \frac{2-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}-2+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{-1}{x^3-1}$$
Pour $x \in]1, +\infty[,\ g(x)-2<0$ et pour $x \in]-\infty, 1[,\ g(x)-2>0$.
Donc, la courbe représentative de g est en dessous de la tangente sur $]1, +\infty[$ et au dessus sur $]-\infty, 1[$.

Exercice 4 Pour chacune des fonctions, étudier la parité et donner son intervalle d'étude.

1. $x \mapsto \ln(|x|)$.
   Correction La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(|-x|) = \ln(|x|)$.
   Donc, la fonction est paire et on peut l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.
2. $x \mapsto \sin(x^2)$.
   Correction La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin((-x^2) = \sin(x^2)$.
   Donc, la fonction est paire et on peut l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.
3. $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x^3+x}$.
   Correction La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^3-x} = \dfrac{x^2-1}{-(x^3+x)} = -\dfrac{x^2-1}{x^3+x}$.
   Donc la fonction est impaire et on peut l'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ croissantes sur $\mathbb{R}$.

1. Etudier la monotonie de $f+g$.
   Correction Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leq y$.
   $\Rightarrow f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$.
   $\Rightarrow f(x)+g(x) \leq f(y)+g(y)$ par addition d'inégalités.
   Donc $f+g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si f et g sont à valeurs positives, étudier la monotonie de $f \times g$.
   Correction On suppose maintenant que f et g sont à valeurs positives.
   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \leq y$.
   $\Rightarrow f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$.
   $\Rightarrow f(x).g(x) \leq f(y).g(y)$ par produit d'inégalités.
   Donc fg est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Pour chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition et l'expression de la fonction $g \circ f$.

1. $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = \ln(x)$
   Correction $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$. Nous devons maintenant comparer D_g à $f(D_f)$ pour savoir si les valeurs prises par f appartiennent bien à l'ensemble D_g.
   La fonction f est un polynôme dont le sommet se situe en $\dfrac{-b}{2a} = 0$ et $f(0) = -2$ donc la courbe de f coupe l'axe des abscisses en 2 points $(-\sqrt{2}, 0)$ et $(\sqrt{2}, 0)$.
   La fonction f est strictement positive sur $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ donc la fonction $g \circ f$ est définie sur cet ensemble et
   $$\forall x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[,\ g \circ f(x) = \ln(x^2-2).$$
2. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
   Correction $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$.
   La fonction f est un polynôme dont le sommet se situe en $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$ et $f(1) = 2$. Puisque le coefficient directeur du polynôme est positif, on sait que le sommet est un minimum global de la fonction donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 2$.
   La fonction f ne prend que des valeurs supérieures à 2 donc supérieures à 0. Ainsi, $f(D_f) \subset D_g$ et on peut définir la composée $g \circ f$ sur $\mathbb{R}$ par
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g \circ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}}.$$

Exercice 7 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On définit $f : x \mapsto \dfrac{x+a}{x^2+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x+b}{x^2+1}$.

1. Montrer que les tangentes au point d'abscisse $x = 0$ des fonctions f et g sont parallèles.
   Correction Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas et
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{x^2+1-(x+a)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2ax+1}{(x^2+1)^2}$$
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{-x^2+2bx+1}{(x^2+1)^2}$$
   Donc, $f'(0) = 1$ et $g'(0) = 1$.
   Les tangentes en 0 ont donc le même coefficient directeur, elles sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes au point d'abscisse $x = 1$ sont concourantes.
   Correction $f'(1) = \dfrac{a}{2}$ donc l'équation de la tangente en 1 à la courbe de f est $y = \dfrac{a}{2}(x-1) + \dfrac{1+a}{2}$.
   $g'(1) = \dfrac{b}{2}$ donc l'équation de la tangente en 1 à la courbe de g est $y = \dfrac{b}{2}(x-1) + \dfrac{1+b}{2}$.
   On cherche un point d'intersection entre les deux droites.
   $$\frac{a}{2}(x-1) + \frac{1+a}{2} = \frac{b}{2}(x-1) + \frac{1+b}{2} \Leftrightarrow ax+1 = bx+1 \Leftrightarrow x = 0$$
   Donc les deux tangentes sont concourantes en $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.