

Chapitre 7 : Etude de fonctions

Table des matières

1	Généralités sur les fonctions	2
1.1	Ensemble de définition, graphe et asymptote d'une fonction	2
1.2	Parité d'une fonction	2
1.3	Périodicité d'une fonction	3
1.4	Monotonie d'une fonction	4
1.5	Fonctions minorées, majorées et bornées	4
2	Limites et asymptotes	5
2.1	Limites aux bords de l'ensemble de définition	5
2.2	Asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$	6
3	Dérivée et variations d'une fonction	7
3.1	Dérivée et sens de variation d'une fonction	7
3.2	Justifier la dérivabilité	7
3.3	Fonctions dérivées usuelles	7
3.4	Opérations sur les fonctions dérivables	8
3.5	Dérivation d'une composée de fonctions	8
3.6	Equation de la tangente	10

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Ensemble de définition, graphe et asymptote d'une fonction

Définition 1.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On appelle domaine de définition de f le sous-espace de $\mathbb{R}$ pour lequel la fonction f est bien définie. On le note D_f .

On appelle graphe de f les points de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(x, f(x))$.

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)), x \in D_f\}$$

Exemple 2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } 1 - x^2 > 0\}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 1[$. Donc, $D_f =]-1; 0[\cup]0; 1[$.

1.2 Parité d'une fonction

Définition 3.

Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- La fonction f est paire lorsque $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$.
- La fonction f est impaire lorsque $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$.

Exemple 4. Etudier la parité de $x \mapsto \frac{x \sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

On commence par l'ensemble de définition : $D_f =]-1; 1[$.

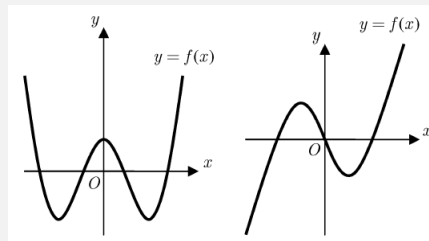
$$\text{Soit } x \in D_f. f(-x) = \frac{-x \sin(-x)}{\sqrt{1-(-x)^2}} = \frac{x \sin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = f(x).$$

La fonction f est paire.

Théorème 5.

Soit f une fonction définie sur $D_f =]-a; a[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Si f est paire alors son graphe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy) .
2. Si f est impaire alors son graphe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine O .



Dans les deux cas, il suffit d'étudier f sur $[0; a[$.

Démonstration : 1. Supposons f paire. Soit $(x, f(x))$ un point du graphe de f .
 Le symétrique de ce point par rapport à l'axe (Oy) est le point $(-x, f(x))$.
 Or, f est paire donc $f(x) = f(-x)$.
 Finalement, le symétrique de $(x, f(x))$ par rapport à (Oy) est $(-x, f(-x))$ et c'est bien un point du graphe de f .

2. Supposons f impaire. Soit $(x, f(x))$ un point du graphe de f .
 Le symétrique de ce point par rapport à l'origine est le point $(-x, -f(x))$.
 Or, f est impaire donc $f(-x) = -f(x)$.
 Finalement, le symétrique de $(x, f(x))$ par rapport à l'origine est $(-x, f(-x))$ et c'est bien un point du graphe de f . ■

1.3 Périodicité d'une fonction

Définition 6.

Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $T \in \mathbb{R}^*$.
 La fonction f est T -périodique lorsque que $\forall x \in D_f, f(x+T) = f(x)$. Le réel T est appelé une période de f .

Exemple 7. Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π .

Exemple 8. Etudier la périodicité de la fonction $x \mapsto \tan(2x)$.

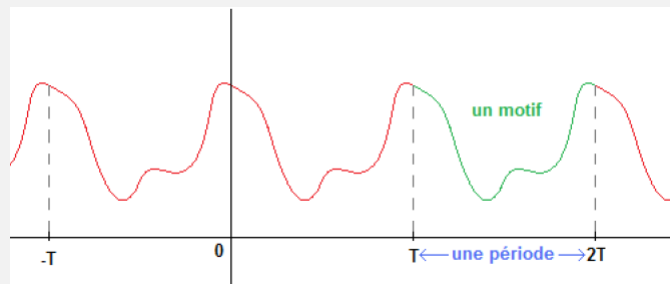
On commence par l'ensemble de définition de $f : D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Soit $x \in D_f$. $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan(2x + \pi) = \tan(2x) = f(x)$.

La fonction f est π -périodique.

Théorème 9.

Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$.
 Si f est T -périodique alors son graphe $\mathcal{C}_f$ s'obtient par une infinité de translation de son graphe réduit à un ensemble de longueur T .



Il suffit alors d'étudier f sur une période $[0; T[$.

Démonstration : Supposons f paire de période T . Soit $x \in \mathbb{R}$.

Notons $n = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$. On a alors $n \leq \frac{x}{T} < n+1$.

Donc, $nT \leq x < nT + T$

Donc, $0 \leq x - nT < T$.

Or, $f(x) = f(x - nT)$ et $x - nT \in [0; T[$ donc le graphe de f est bien obtenu par translations de son graphe réduit à $[0, T[$. ■

Exemple 10. Sur quel ensemble doit-on étudier la fonction $f : x \mapsto \cos(2x) + 1$?

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) + 1 = f(x)$. La fonction f est π -périodique.

On l'étudie seulement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

En effet, par parité, on étend l'étude à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et, par périodicité, on étend l'étude à $\mathbb{R}$.

1.4 Monotonie d'une fonction

Définition 11.

Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans D_f .

- La fonction est croissante sur I lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- La fonction est décroissante sur I lorsque

$$\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

- Une fonction croissante ou décroissante sur I est monotone sur I .

Exemple 12. Etudier, sans calcul de la dérivée, la monotonie de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ définie sur $[0, 1[$.

Soit $(x, y) \in [0, 1]^2$ avec $x \leq y$.

Alors, $x^2 \leq y^2$ car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; 1[$.

Donc, $1 - x^2 \geq 1 - y^2$.

Donc, $\sqrt{1 - x^2} \geq \sqrt{1 - y^2}$ par croissance de la fonction racine carrée.

Donc, $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$ par décroissance de la fonction inverse.

Donc, f est croissante sur $[0, 1[$.

1.5 Fonctions minorées, majorées et bornées

Définition 13.

Soit f une fonction définie sur D_f et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $A \subset D_f$.

On dit que f est minorée sur A lorsque

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq f(x).$$

m est un minorant de f sur A .

On dit que f est majorée sur A lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) \leq M.$$

M est un majorant de f sur A .

On dit que f est bornée sur A lorsque

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in A, m \leq f(x) \leq M.$$

2 Limites et asymptotes

2.1 Limites aux bords de l'ensemble de définition

Théorème 14.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \bar{I}$.
Ce tableau donne la valeur de $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \backslash \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$-\infty$	ℓ'	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Forme Ind.
ℓ	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	Forme Ind.	$+\infty$	$+\infty$

Démonstration : Il faut la définition d'une limite. ■

Théorème 15.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \bar{I}$.
Ce tableau donne la valeur de $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$ selon les valeurs des limites de f et de g .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \backslash \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Forme Ind.	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$-\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$-\infty$
0	Forme Ind.	0	0	0	Forme Ind.
$\ell > 0$	$-\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Forme Ind.	$+\infty$	$+\infty$

Démonstration : Il faut la définition d'une limite. ■

Théorème 16.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \bar{I}$.
Ce tableau donne la valeur de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \backslash \lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0^-	0^+	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$\ell < 0$	0^+	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0^-
0^-	0^+	0^+	F.I.	F.I.	0^-	0^-
0^+	0^+	0^-	F.I.	F.I.	0^+	0^+
$\ell > 0$	0^-	$\frac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0^+
$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.

Démonstration : Il faut la définition d'une limite. ■

Théorème 17.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \bar{I}$. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que , au voisinage de a , $f(x) \leq g(x)$.

1. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors g admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$.
2. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors f admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Théorème 18.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \bar{I}$.

On suppose que

1. Au voisinage de a , $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.
2. Les fonctions f et g admettent des limites **finies** en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors, la fonction h admet une limite en a et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$.

2.2 Asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ **Définition 19.**

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \notin D_f$.

On dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale pour la fonction f lorsque

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$$

On dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale pour la fonction f lorsque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

Exemple 20. Etudier les différentes asymptotes de la fonction $f : x \mapsto \frac{x+3}{2x+4}$.

On commence par l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

- En $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq -2, f(x) = \frac{x(1 + \frac{3}{x})}{2x(1 + \frac{2}{x})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}}. \text{ Donc, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est une tangente horizontale.

- En -2^- .

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (2x+4) = 0^- \text{ et } -2+3 > 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty.$$

- En -2^+ .

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} (2x+4) = 0^+ \text{ et } -2+3 > 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty.$$

La droite d'équation $x = -2$ est une tangente verticale.

3 Dérivée et variations d'une fonction

3.1 Dérivée et sens de variation d'une fonction

Théorème 21.

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $I \subset D_f$ tel que f soit dérivable sur I .

1. f est constante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I, f'(x) = 0$.
2. f est croissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$.
3. f est décroissante sur I si, et seulement si, $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$.

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivée comme limite de taux d'accroissement et du théorème des accroissements finis.

On le démontrera plus tard. ■

3.2 Justifier la dérivabilité

Théorème 22.

1. Les fonction usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition : polynômes, fractions rationnelles, sinus, cosinus, tangente, exponentielle et logarithme.
2. Les fonctions valeur absolue, partie entière ou racine carrée ne sont pas dérivables sur tout leur ensemble de définition.

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivabilité.

On le démontrera plus tard. ■

3.3 Fonctions dérivées usuelles

Théorème 23.

Fonction f	Dérivable sur	Fonction f'	Fonction f	Dérivable sur	Fonction f'
$x \mapsto \lambda$	$\mathbb{R}$	0	$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \lambda x$	$\mathbb{R}$	λ	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	e^x
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$2x$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivabilité et de la dérivée.

On le démontrera plus tard. ■

3.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 24.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même intervalle I .

1. La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
2. La fonction fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
3. Si g ne s'annule pas, la fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.
4. Si g ne s'annule pas, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivabilité.

On le démontrera plus tard. ■

Exemple 25. Justifier que la fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa dérivée.

La fonction tangente est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas donc la fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

3.5 Dérivation d'une composée de fonctions

Définition 26.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f définie sur I à valeurs dans J . Soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$.

On appelle composé de f par g la fonction notée $g \circ f$ et définie par

$$g \circ f : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Exemple 27. Soient f et g les fonctions définies par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, g(x) = \frac{x}{x+1}$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

- Pour $f \circ g$.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, (f \circ g)(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 1 = \frac{x^2 - (x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}.$$

- Pour $g \circ f$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, +\infty[$ et la fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Pour ne pas atteindre la valeur -1 avec f , on doit retirer 0 de l'ensemble de définition.

Donc, $g \circ f$ est défini sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (g \circ f)(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Théorème 28.

Soient $f : I \rightarrow J$ dérivable sur I et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur J .

La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivabilité.

On le démontrera plus tard. ■

Exemple 29. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

On reconnaît une composée avec la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x}$ et la fonction g définie par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \cos(x)$.

Puisque la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, il n'y a aucune restriction et $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Par le théorème précédent, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, (g \circ f)'(x) = \frac{-1}{x^2} \times -\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exemple 30. Déterminer la dérivée de $x \mapsto \ln(2x)$.

On reconnaît une composée avec la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x$ et la fonction g définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = \ln(x)$.

La fonction f doit être à valeurs strictement positives donc on la restreint à $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement, $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par le théorème précédent, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (g \circ f)'(x) = 2 \times \frac{1}{2x} = \frac{1}{x}$.

Théorème 31.

Soit u une fonction dérivable sur I .

Fonction	Fonction dérivée
$x \mapsto (u(x))^2, n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto 2u'(x).u(x)$
$x \mapsto (u(x))^n, n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto nu'(x).(u(x))^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{u(x)}$	$x \mapsto \frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$
$x \mapsto \sqrt{u(x)}$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$x \mapsto \mathbf{e}^{u(x)}$	$x \mapsto u'(x).\mathbf{e}^{u(x)}$
$x \mapsto \ln(u(x))$	$x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$
$\sin(u)$	$x \mapsto u'(x).\cos(u(x)).$

Exemple 32. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln(1+x) \leq x$.

On va étudier la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ et dresser son tableau de variation pour obtenir son signe.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} \leq 0$$

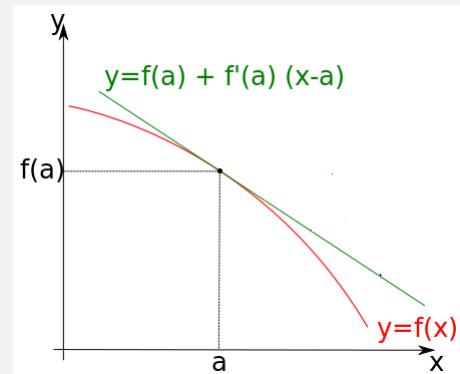
La fonction est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(0) = 0$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq f(0) \Rightarrow \ln(1+x) - x \leq 0 \Rightarrow \ln(1+x) \leq x$$

3.6 Equation de la tangente

Théorème 33.

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in D_f$.
Si f est dérivable en a alors la droite d'équation
 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est tangente à la courbe C_f
au point $(a, f(a))$.



Remarque 34. L'étude du signe de la fonction $x \rightarrow f(x) - (f(a) + f'(a)(x - a))$ permet ensuite de déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente.