Prénom :

Nom :

Interrogation $n°5$: Sommes, produits et Complexes A

1 — 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N},\ k \leq n$. Donner la valeur de $\binom{n}{k}$.

1,5 — 2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Exprimer $(a-b)^n$ sous forme de somme.

2 — 3. Citer les formules d'Euler.

1 — 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner deux caractérisations de $z \in \mathbb{R}$.

5. **Exercices**

   1 — (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$.

   2 ~~1,5~~ — (b) Soit $z = 1 - \sqrt{3}\mathbf{i}$. Donner l'écriture exponentielle de z et en déduire z^{2023}.

   1,5 — (c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(\theta)$.

1) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

2) $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (-b)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

4) $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z = \bar{z}$.

5) a) $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 1^{n-k} = (3+1)^n = 4^n$.

b) $|z| = \sqrt{1+3} = 2$.

$z = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2e^{-i\pi/3}$

$$\begin{array}{r|l} 2023 & 3 \\ 22 & 674 \\ 13 & \\ 1 & \end{array}$$

$z^{2023} = 2^{2023} e^{-\frac{2023 i\pi}{3}} = 2^{2023} \cdot e^{-i\pi\left(674 + \frac{1}{3}\right)}$

$$\boxed{z^{2023} = 2^{2023} \cdot e^{-i\pi/3}}$$

(c) $\cos^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8}$

$$\boxed{\cos^3(\theta) = \frac{\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)}{4}}$$

Prénom :
Nom :

Interrogation n°5 : Sommes, produits et Complexes **B**

1 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Donner la valeur de $\binom{n}{k}$.

1 2. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Exprimer $(a+b)^n$ sous forme de somme.

2 3. Citer la formule de Moivre.

1 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner deux caractérisations de $z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$. *$z$ est un imaginaire pur.*

5. **Exercices**

   2 (a) Soit $z = 2 + 2\mathrm{i}$. Donner l'écriture trigonométrique de z et en déduire z^{2023}.

   1,5 (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$.

   1,5 (c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^3(\theta)$.

1) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

2) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

4) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

5) a) $|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

$$z = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

$$\begin{array}{r|l} 2023 & 4 \\ 023 & 505 \\ 3 & \end{array}$$

$$z^{2023} = (2\sqrt{2})^{2023} \cdot e^{i\frac{2023\pi}{4}}$$
$$= 2^{3034}\sqrt{2}\, e^{i\pi(505 + 3/4)}$$

$$\boxed{z^{2023} = 2^{3034} \cdot \sqrt{2}\, e^{i7\pi/4}}$$

ⓑ $S = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} = 2^n - 1$.

ⓒ $\sin^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i}$

$$= \frac{2i\sin(3\theta) - 6i\sin(\theta)}{-8i}$$

$$\boxed{\sin^3(\theta) = \frac{3\sin(\theta) - \sin(3\theta)}{4}}$$