

Chapitre 8 : Fonctions usuelles

Table des matières

1	Fonctions trigonométriques	2
1.1	Fonction cosinus	2
1.2	Fonction sinus	2
1.3	Fonction tangente	2
2	Fonctions exponentielle et logarithme népérien	3
2.1	Fonction exponentielle	3
2.2	Fonction logarithme népérien	5
3	Fonctions exponentielle et logarithme en base quelconque	6
3.1	Fonctions logarithme décimal	6
3.2	Fonction exponentielle en base quelconque	6
3.3	Fonctions puissances	8

1 Fonctions trigonométriques

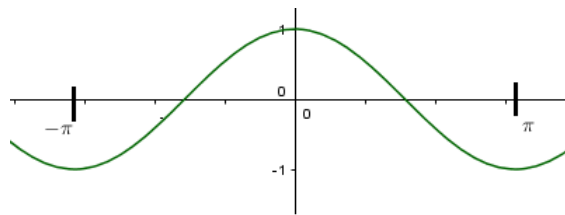
1.1 Fonction cosinus

Théorème 1.

La fonction $\cos$ est paire, 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$.

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivée comme limite de taux d'accroissement.
On le démontrera plus tard. ■

x	$-\pi$	0	π
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	-1	1	-1



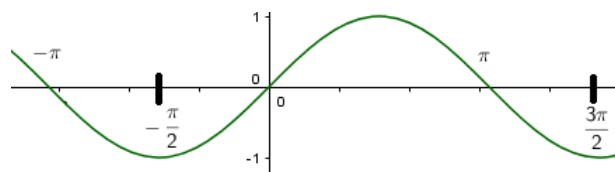
1.2 Fonction sinus

Théorème 2.

La fonction $\sin$ est impaire, 2π -périodique et continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1, 1]$.
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$.

Démonstration : On a besoin de la définition de la dérivée comme limite de taux d'accroissement.
On le démontrera plus tard. ■

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	-1	1	-1



1.3 Fonction tangente

Théorème 3.

La fonction $\tan$ est impaire, π -périodique et définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
Elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Démonstration : La fonction tangente est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ avec un dénomi-

nateur qui ne s'annule pas donc la fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et

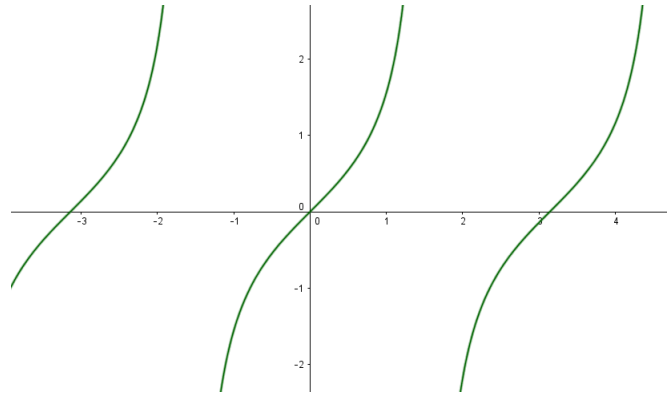
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cos(x) - \sin(x) \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

On peut simplifier différemment.

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

■

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	+	
$\tan(x)$	$\left\ \begin{array}{c} -\infty \\ \nearrow \\ +\infty \end{array} \right\ $	



2 Fonctions exponentielle et logarithme népérien

2.1 Fonction exponentielle

Théorème 4.

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$
On la note $x \mapsto \exp(x)$ ou encore $x \mapsto e^x$.

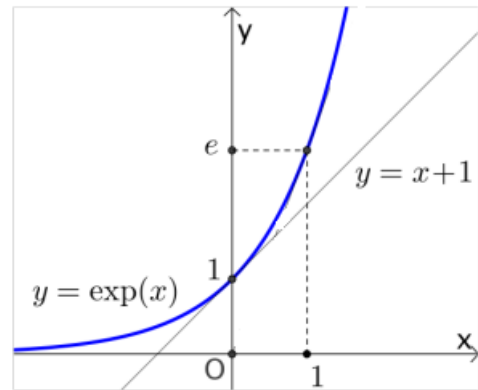
Théorème 5.

1. La fonction exp est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème 6.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$	0	+	$+\infty$
$\exp(x)$	$0 \rightarrow 1 \rightarrow +\infty$		


Théorème 7.

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

Démonstration : On étudie la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - (x + 1)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Donc, la fonction f est décroissante sur $] -\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(0)$.

Or, $f(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - (x + 1) \geq 0$. ■

Théorème 8 (Propriétés fonctionnelles).

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{Z}, e^{nx} = (e^x)^n$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{xy} = (e^x)^y.$$

Démonstration : On démontre le deuxième point par récurrence pour $\mathbb{N}$. ■

Théorème 9 (Croissances comparées).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

On peut généraliser ces limites :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0.$$

Exemple 10. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 e^{-2x} = (-x e^{-x})^2$.

Or, $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x e^{-x} = 0$. Par produit, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-2x} = 0$.

2.2 Fonction logarithme népérien

Définition 11.

On appelle logarithme népérien et on note $\ln$ l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

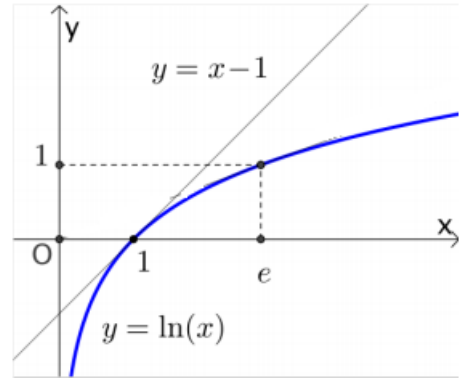
Théorème 12.

1. La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$.
2. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 13.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	+	+
$f(x)$	$\parallel$	$-\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$	



Théorème 14.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$$

Théorème 15 (Propriétés fonctionnelles).

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

Théorème 16.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \forall n \in \mathbb{N}, \ln(x^n) = n \ln(x)$$

Théorème 17 (Croissances comparées).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

On peut généraliser ces limites :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0.$$

3 Fonctions exponentielle et logarithme en base quelconque

3.1 Fonctions logarithme décimal

Définition 18.

On appelle logarithme décimal et on note $x \mapsto \log(x)$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Théorème 19.

1. La fonction $\log$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, $\log'(x) = \frac{1}{x \ln(10)}$.
2. La fonction $\log$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 20.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

x	0	1	$+\infty$
$\log'(x)$	$\parallel$	+	
$\log(x)$	$\parallel$	$-\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$	

3.2 Fonction exponentielle en base quelconque

Définition 21.

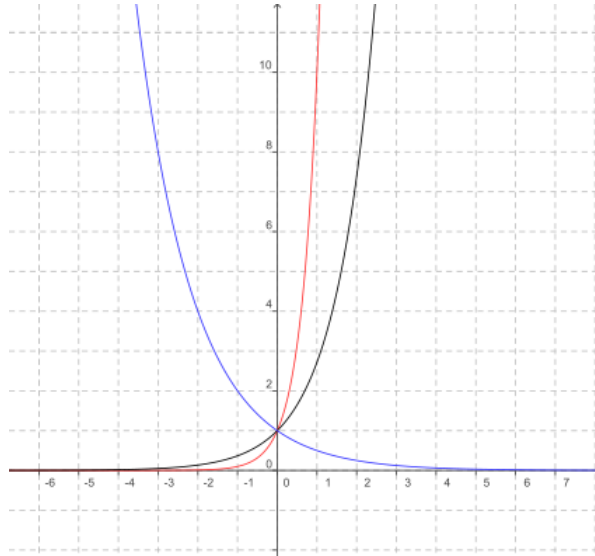
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \exp(x \ln(a))$. Par convention, on note $a^x = \exp(x \ln(a))$.

Pour $0 < a < 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_a(x)$	$-$	1	$-$
$f_a(x)$	$+\infty$	1	0

Pour $a > 1$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_a(x)$	$+$	1	$+$
$f_a(x)$	0	1	$+\infty$



Théorème 22.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. La fonction $x \mapsto a^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction $x \mapsto a^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, (a^x)' = \ln(a)a^x$.
3. La fonction $x \mapsto a^x$ est $\begin{cases} \text{strictement décroissante sur } \mathbb{R} \text{ si } 0 < a < 1. \\ \text{constante sur } \mathbb{R} \text{ si } a = 1. \\ \text{strictement croissante sur } \mathbb{R} \text{ si } a > 1. \end{cases}$

Théorème 23.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{pour } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{pour } a > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{pour } a > 1 \end{cases}$$

Théorème 24.

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad a^{xy} = (a^x)^y$$

3.3 Fonctions puissances

Définition 25.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \mapsto \exp(\alpha \ln(x))$

Par convention, on note $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.

Théorème 26.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, (x^\alpha)' = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha = 0 \\ \alpha x^{\alpha-1} & \text{pour } \alpha \neq 0 \end{cases}$
3. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est $\begin{cases} \text{strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^* & \text{pour } \alpha < 0. \\ \text{constante sur } \mathbb{R}_+^* & \text{pour } \alpha = 0. \\ \text{strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* & \text{pour } \alpha > 0. \end{cases}$

Théorème 27.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{pour } \alpha < 0 \\ 0 & \text{pour } \alpha > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha < 0 \\ +\infty & \text{pour } \alpha > 0 \end{cases}$$

Pour $\alpha < 0$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	- 1 -	-
$f(x)$	$\parallel$ $+\infty$	$\rightarrow$ 1	$\rightarrow$ 0

Pour $\alpha > 0$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	+ 1 +	+
$f(x)$	$\parallel$ 0	$\rightarrow$ 1	$\rightarrow$ $+\infty$

