Chapitre 9 : Applications (prof)

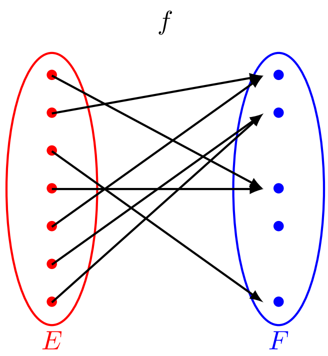
Table des matières

1 Applications entre deux ensembles

1.1 Vocabulaire

Définition 1.

Soient E et F deux ensembles.
On appelle application de E dans F une façon d'associer à tout élément de E un unique élément dans F.



En résumé, on notera $f : \left\{ \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$
On dit que f est définie sur E à valeurs dans F.

On note $\mathcal{F}(E,F)$ ou F^E l'ensemble de toutes les applications de E dans F.

Exemple 2 Les fonctions usuelles sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F.
Dans l'équation $f(x) = y$, y est **l'**image de x et x est **un** antécédent de y par f.

Exemple 4 0 et 2π sont des antécédents de 1 par la fonction cosinus et des antécédents de 0 par la fonction sinus.

Définition 5.

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F.
On appelle graphe de l'application f l'ensemble

$$\Gamma = \{(x, f(x)),\ x \in E\} = \{(x,y) \in E \times F \mid f(x) = y\}$$

Remarque 6 Lorsque E et F sont des parties de $\mathbb{R}$, on peut représenter le graphe de f.

1.2 Applications particulières

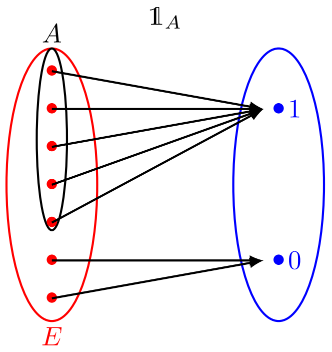
Définition 7.

Soient E un ensemble. On appelle identité de E et on note id_E l'application $\mathrm{id}_E : \left\{ \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x \end{array} \right.$

Définition 8.

Soient E un ensemble et A une partie de E ($A \subset E$).

On appelle <u>indicatrice de A</u> l'application de E dans $\{0,1\}$ définie par $\mathbb{1}_A : \left\{ \begin{array}{l} E \to \{0,1\} \\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right. \end{array} \right.$.

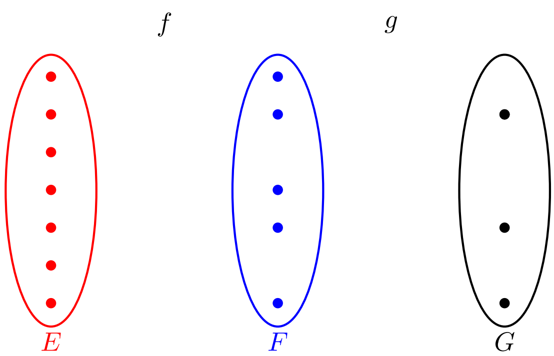


1.3 Composée d'applications

Définition 9.

Soient E, F et G un ensemble. Soit $f \in F^E$. Soit $g \in G^F$.
On appelle <u>composé de f par g</u> la fonction notée $g \circ f$ et définie par

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{l} E \to G \\ x \mapsto g\big(f(x)\big) \end{array} \right.$$



Théorème 10.

Soient E, F, G et H quatre ensembles. Soit $f \in F^E$. Soit $g \in G^F$. Soit $h \in H^G$.

1. $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$
2. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f$

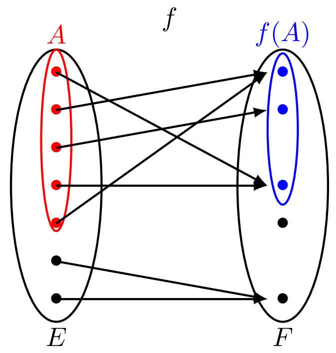
Démonstration : $\mathrm{id}_E : E \to E$ et$f : E \to F$ donc $f \circ \mathrm{id}_E : E \to F$.
Soit $x \in E$. $(f \circ \mathrm{id}_E)(x) = f[\mathrm{id}_E(x)] = f(x)$. Donc, $f \circ \mathrm{id}_E = f$. ■

1.4 Images directes d'une application

Définition 11.

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F.
Soit $A \subset E$. On appelle <u>image directe de A par f</u> l'ensemble contenant les images de tous les éléments de A.

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$$



$$\forall y \in F,\ y \in f(A) \Leftrightarrow \exists\, x \in A \text{ tel que } f(x) = y$$

Remarque 12 Si f est définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut lire les images directes sur le tableau de variations ou le graphique.

Exemple 13 Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto |x| \end{array} \right.$. Déterminer $f([-1,1])$, $f([-3;4])$, $f([-2;+\infty[)$ et $f(\varnothing)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Donc, $f([-1,1]) = [0,1]$, $f([-3;4]) = [0,4]$, $f([-2;+\infty[) = [2,+\infty[$ et $f(\varnothing) = \varnothing$.

Exemple 14 Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{array} \right.$. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f([-\pi,\pi])$ et $f([-2,+\infty[)$.

$f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
$f([-\pi,\pi]) = [-1,1]$
$f([-2,+\infty[) = [-1,1]$.

Théorème 15.

Soient E et F deux ensembles. Soit $f \in F^E$. Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$.
Si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.

Démonstration : Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$ avec $A \subset B$.
On veut démontrer une inclusion. Soit $y \in f(A)$.
Il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.
Donc, puisque $A \subset B$, il existe $x \in B$ tel que $f(x) = y$.

Donc, $y \in f(B)$.
Donc, $f(A) \subset f(B)$. ■

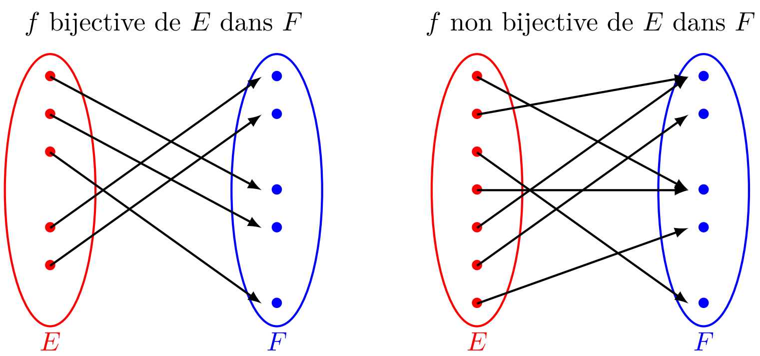
2 Application injectives, surjectives et bijectives

2.1 Bijectivité

Définition 16.

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F.
On dit que f est une bijection de E dans F lorsque tout élément de F a **exactement un** antécédent par f.

$$\forall y \in F,\ \exists!\ x \in E,\ y = f(x).$$



Méthode Pour montrer que f est une bijection de E dans F,

- On fixe y_0 dans F : Soit $y_0 \in F$.
- On cherche les antécédents de y_0 en résolvant dans E l'équation $f(x) = y_0$.
- On conclut :
  - S'il n'y a qu'une solution, f est une bijection de E dans F.
  - S'il existe une valeur de y_0 pour laquelle l'équation a zéro ou plusieurs solutions alors f n'est pas bijective de E dans F.

Exemple 17 Etudier les fonctions suivantes.

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 4x+3 \end{array} \right.$

   Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $4x+3 = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y-3}{4}$.
   y a un unique antécédent par f donc f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$

   Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.
   y a plusieurs antécédents par f dans $\mathbb{R}$ donc f n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{3x+2}{x-1} \end{array} \right.$

   Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   $\dfrac{3x+2}{x-1} = y \Leftrightarrow 3x+2 = y(x-1) \Leftrightarrow x(3-y) = -2-y$.
   On veut diviser par $y-3$ donc il faut que $y \neq 3$.

$\dfrac{3x+2}{x-1} = y \Leftrightarrow x = \dfrac{-2-y}{y-3} = \dfrac{y+2}{3-y}$.
y a un unique antécédent par f donc f est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

4. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 3n \end{cases}$

   Soit $y \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{N}$.
   $3x = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{3}$.
   Si y n'est pas divisible par 3, x n'est pas un entier.
   y n'a pas toujours d'antécédent par f donc f n'est pas bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Théorème 18 (Théorème de la bijection)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est continue et strictement monotone sur I alors f est une bijection de I dans $f(I)$.

Démonstration : Plus tard. Dans le chapitre continuité. ■

Exemple 19

- La fonction cos est une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.
- La fonction sin est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$.
- La fonction tan est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.
- La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 20.

Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.
Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective de E dans F.

FAIRE UN DESSIN.

Démonstration : Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$, bijectives.
L'application $g \circ f$ va de E dans G. Soit $z \in G$.
Puisque g est bijective de F dans G, $\exists!\ y \in F$ tel que $z = g(y)$.
Puisque f est bijective de E dans F, $\exists!\ x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Donc, $\exists!\ x \in E$ tel que $z = g(y) = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$.
Donc, $g \circ f$ est bijective de E dans G. ■

Remarque 21 Quelle est la négation de f est une bijection de E dans F ?

Il existe des éléments de F qui n'ont pas d'antécédent par f dans E ou il existe des éléments de F qui ont plusieurs antécédents par f dans E.

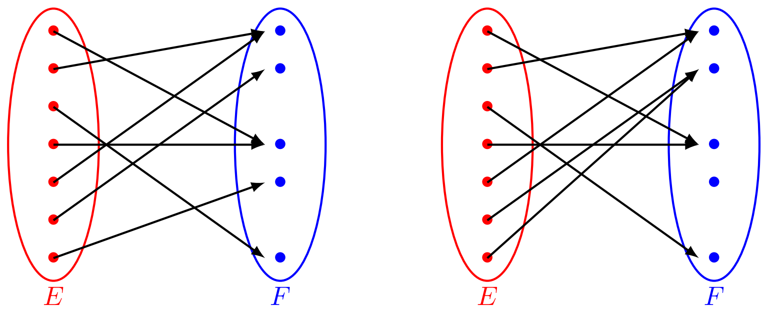
2.2 Surjectivité

Définition 22.

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F.
On dit que f est une <u>surjection de E dans F</u> lorsque tout élément de F a **au moins un** antécédent par f.

$$\forall y \in F,\ \exists\, x \in E,\ y = f(x).$$

f surjective de E dans F — f non surjective de E dans F



<u>Méthode :</u> Pour montrer que f est surjective de E dans F,
- On fixe y_0 dans F : Soit $y_0 \in F$.
- On cherche les antécédents de y_0 en résolvant dans E l'équation $f(x) = y_0$.
- On conclut :
  - S'il y a des solutions, f est une surjection de E dans F.
  - S'il existe une valeur de y_0 pour laquelle l'équation n'a pas de solution, f n'est pas surjective de E dans F.

<u>Exemple 23</u>
1. La fonction cosinus est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$.
2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$

   Soit $y \in \mathbb{R}$.
   Si y est strictement négatif, l'équation $x^2 = y$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
   Donc, f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 4x + 3 \end{array} \right.$

   Soit $y \in \mathbb{R}$.
   $4x + 3 = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y-3}{4}$
   Donc, y a au moins un antécédent par f dans $\mathbb{R}$.
   Donc, f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

<u>Remarque 24</u> Si une application f de E dans F est une surjection de E dans F alors tous les éléments de F sont atteints : $f(E) = F$.

<u>Remarque 25</u> Si f est une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la surjectivité se traduit par, pour chaque élément y_0 de $\mathbb{R}$, la droite $y = y_0$ coupe le graphe de la fonction f en au moins un point.

Théorème 26.

Soient E et F deux ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.
Si f est bijective de E dans F alors f est surjective de E dans F.

Démonstration : Supposons f bijective de E dans F.
Tous les éléments de F ont un unique antécédent par f dans E.
Donc, tous les éléments de F ont au moins un antécédent par f dans E.
Donc, f est surjective de E dans F. ∎

Théorème 27.

Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$.
Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

FAIRE UN DESSIN.

Démonstration : Soient $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$, surjective.
L'application $g \circ f$ va de E dans G. Soit $z \in G$.
Puisque g est surjective de F dans G, $\exists\, y \in F$ tel que $z = g(y)$.
Puisque f est surjective de E dans F, $\exists\, x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Donc, $\exists\, x \in E$ tel que $z = g(y) = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$.
Donc, $g \circ f$ est surjective de E dans G. ∎

Remarque 28 Comment traduit-on la non surjectivité ?

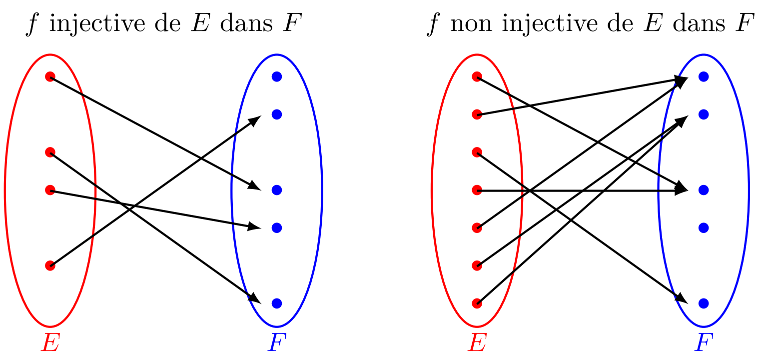
Il existe des éléments de F qui n'ont pas d'antécédent par f dans E.

2.3 Injectivité

Définition 29.

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F.
On dit que f est une injection de E dans F lorsque tout élément de F a **au plus un** antécédent par f.

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \qquad \text{ou} \qquad \forall (x,y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$



Méthode : Pour montrer que f est injective de E dans F,

- On fixe deux éléments de E ayant la même image : Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
- On cherche à montrer que $x_1 = x_2$.
- On conclut :
  - Si $x_1 = x_2$, f est une injection de E dans F.
  - Si non, f n'est pas injective de E dans F.
- On peut aussi montrer que l'équation $f(x) = y_0$ a, au plus, une solution.

Exemple 30

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 4x+3 \end{array} \right.$

   Soit $y \in \mathbb{R}$.
   $4x+3 = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y-3}{4}$
   Donc, y a au plus un antécédent par f dans $\mathbb{R}$.
   Donc, f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto |x| \end{array} \right.$

   Soit $y \in \mathbb{R}_+$.
   $|x| = y \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
   Donc, y a plusieurs antécédents par f dans $\mathbb{R}$.
   Donc, f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.
3. La fonction partie entière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   Soit $y \in \mathbb{R}_+$.
   Si y n'est pas un entier l'équation $\lfloor x \rfloor = y$ n'as pas de solution.
   Soit $y \in \mathbb{Z}$.
   $\lfloor x \rfloor = y \Leftrightarrow x \in [y, y+1[$
   Donc, y a plusieurs antécédents par f dans $\mathbb{R}$.
   Donc, f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.

Remarque 31 Si f est une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'injectivité se traduit par, pour chaque élément y_0 de $\mathbb{R}$, la droite $y = y_0$ coupe le graphe de la fonction f en au plus un point.

Théorème 32.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone sur I alors f est injective.

Démonstration : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, strictement croissante sur I
Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
Si $x_1 \neq x_2$ alors, pas strict monotonie, $f(x_1) \neq f(x_2)$. C'est absurde.
Donc, $x_1 = x_2$.
Donc, f est injective de I dans $\mathbb{R}$. ■

Théorème 33.

Soient E et F deux ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.
Si f est bijective alors f est injective.

Démonstration : Supposons f bijective de E dans F.
Tous les éléments de F ont un unique antécédent par f dans E.
Donc, tous les éléments de F ont au moins un antécédent par f dans E.
Donc, f est surjective de E dans F. ■

Théorème 34.

Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.
Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

Démonstration : Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$, injectives.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.
Puisque, g est injective, alors $f(x_1) = f(x_2)$.

Puisque, f est injective, alors $x_1 = x_2$.
Donc, $g \circ f$ est injective de E dans G. ■

Remarque 35 Comment traduit-on la non injectivité ?
Certains éléments de F ont plusieurs antécédents dans E par f.

2.4 Bijection réciproque

Théorème 36.

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application de E dans F.
f est bijective de E dans F si, et seulement si, elle est injective et surjective de E dans F.

Démonstration : unique $\Leftrightarrow$ au moins un et au plus un. ■

Définition 37.

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application **bijective** de E dans F.

$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ y = f(x).$$

On appelle bijection réciproque de f l'application de F dans E qui a tout élément de F associe son unique antécédent. On la note f^{-1}.

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ \ y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y).$$

Exemple 38 La fonction exp est la bijection réciproque de la fonction ln de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Méthode : Pour trouver la bijection réciproque de f :

- On montrer que f est bijective de E dans F.
- On fixe x quelconque dans E et y quelconque dans F.
- On "inverse" l'équation $y = f(x)$ pour exprimer x en fonction de y.

Exemple 39 Déterminer les bijections réciproques des fonctions suivantes

1. Soit $f : \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 4x + 3 \end{array}\right.$

   f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 4x + 3 = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y-3}{4}$.
   Donc, $f^{-1} : \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \dfrac{y-3}{4} \end{array}\right.$

2. Soit $f : \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ x \mapsto \dfrac{3x+2}{x-1} \end{array}\right.$

   On va justifier la bijectivité et déterminer la bijection réciproque en parallèle.
   Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   $\dfrac{3x+2}{x-1} = y \Leftrightarrow 3x + 2 = y(x-1) \Leftrightarrow x(3-y) = -2 - y \Leftrightarrow x = \dfrac{-2-y}{y-3} = \dfrac{y+2}{3-y}$.
   y a un unique antécédent par f donc f est bijective de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et $f^{-1} : \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ y \mapsto \dfrac{y+2}{3-y} \end{array}\right.$

Remarque 40 Les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Théorème 41.

Soient E et F deux ensembles. Soit f une application bijective de E dans F.

1. $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.
2. f^{-1} est une bijection de F dans E et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Théorème 42.

Soient E, F et G trois ensembles. Soient f une application bijective de E dans F et g une application bijective de F dans G.
Alors, $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration : On a déjà démontré au théorème 20 que $g \circ f$ était bijective de E dans G.
Soit $y \in G$. Soit $x \in E$.

$$(g \circ f)(x) = y \Leftrightarrow g[f(x)] = y \Leftrightarrow f(x) = g^{-1}(y) \Leftrightarrow x = f^{-1}[g^{-1}(y)] = (f^{-1} \circ g^{-1})(y)$$

Donc, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

2.5 Rendre une application surjective, injective ou bijective

Pour rendre une application **surjective**,

- On fixe y_0 dans F : Soit $y_0 \in F$.
- On cherche les antécédents de y_0 en résolvant dans E l'équation $f(x) = y_0$.
- Si certaines valeurs de y_0 n'ont pas d'antécédents, on les exclut et on travaille avec $F \setminus \{y_0\}$.

Pour rendre une application **injective**,

- On fixe deux éléments de E ayant la même image : Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
- On cherche à montrer que $x_1 = x_2$.
- Si on n'y arrive pas, on restreint E pour ne garder qu'un seul des deux antécédents.

Pour rendre une application **bijective**, on restreint l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

Exemple 43 Etudier $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x^2 + 4x + 1$.

On trace le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{13}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Donc, f est bijective de $\left[\dfrac{-1}{3}, +\infty\right[$ dans $\left[\dfrac{13}{3}, +\infty\right[$.
De même, f est bijective de $\left]-\infty, \dfrac{-1}{3}\right]$ dans $\left[\dfrac{13}{3}, +\infty\right[$.