

Exercice 1 Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .

Sur quel ensemble suffit-il de l'étudier ?

Correction La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Elle est paire donc on peut l'étudier sur $[0; +\infty[$.

2. Déterminer les variations de la fonction f .

Correction La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

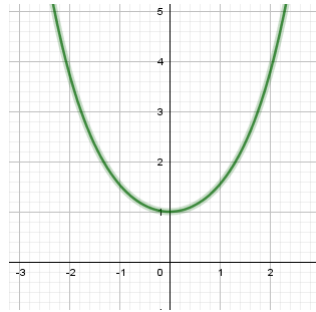
On étudie ensuite le signe de la dérivée. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Finalement, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

3. Calculer les limites de f aux bords de son ensemble de définition et tracer son graphe.

Correction Par somme de limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Par parité, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.



Exercice 2 Soit g la fonction définie par $g : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Donner l'ensemble de définition de g .

Sur quel ensemble suffit-il de l'étudier ? On notera cet ensemble $\mathcal{D}$.

Correction $D_g = \{x \in \mathbb{R}, \sin(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

La fonction g est impaire et π -périodique. On peut réduire l'ensemble d'étude à $\mathcal{D} = \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Déterminer les variations de la fonction g sur $\mathcal{D}$.

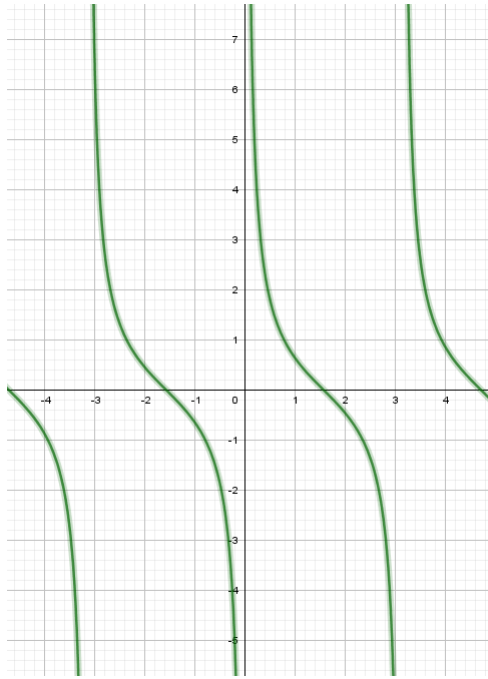
Correction La fonction g est dérivable sur D_g comme quotient de deux fonctions dérivables sur D_g avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

$$\forall x \in D_g, g'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{(\sin(x))^2} = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

La fonction g est décroissante sur $\mathcal{D}$.

3. Calculer les limites de g aux bords de $\mathcal{D}$ et tracer son graphe.

Correction Soit $k \in \mathbb{Z}$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0$.



Exercice 3 Résoudre les équations suivantes.

1. $2e^{4x} - 5e^{2x} + 2 = 0$.

Correction $2e^{4x} - 5e^{2x} + 2 = 0$ est équivalente à $2X^2 - 5X + 2 = 0$ avec $X = e^{2x}$. Résolvons cette équation.

$$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0. \text{ Il y a donc 2 racines réelles : } X_1 = \frac{5+3}{4} = 2 \text{ ou } X_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Cela donne deux valeurs possibles pour } x : x_1 = \frac{1}{2} \ln(2) \text{ ou } x_2 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln(2)}{2}.$$

2. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$.

Correction Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} + 1 = 4e^x \Leftrightarrow X^2 - 4X + 1 = 0$ où $X = e^x$.

$$\Delta = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2 > 0. \text{ Il y a donc deux racines réelles : } X_1 = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } X_2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

Finalement, il y a deux solutions pour x : $x_1 = \ln(2 + \sqrt{3})$ et $x_2 = \ln(2 - \sqrt{3})$.

3. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

Correction Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \Leftrightarrow e^{\sqrt{x} \ln(x)} = e^{x \ln(\sqrt{x})} \Leftrightarrow \sqrt{x} \ln(x) = x \ln(\sqrt{x})$ car $x \mapsto e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \ln(x) = \frac{x}{2} \ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 4.$$

Donc, 1 et 4 sont les solutions.

4. $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Correction On va modifier l'écriture de cette équation :

$$2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{2x} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow$$

$$2^{2x} \times \frac{3}{2} = 3^x \times \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3. \text{ Or, la fonction } x \mapsto \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^x \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ donc}$$

$$2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \text{ donc } x = \frac{3}{2}.$$

Exercice 4 Etudier en détail les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.

Correction Notons f la fonction définie par $x \mapsto x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$.

(a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x \neq 0 \text{ et } x > 0\} = \mathbb{R}_+^*$.

(b) La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas. Par composée avec l'exponentielle, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x} \ln(x)} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$$

Cette dérivée s'annule en $x = e$. Elle est positive sur $]0; e]$ et négative sur $]e; +\infty[$. D'où le tableau de variation

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	+	−
$f(x)$	$\parallel$		

(c) Calculons les limites. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $e^0 = 1$. Par composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

$$f(e) = e^{\frac{\ln(e)}{e}} = e^{\frac{1}{e}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} (= \frac{-\infty}{0^+}) = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	+	−
$f(x)$	$\parallel$		

2. $x \mapsto (x+1)^x$.

Correction Notons f la fonction définie par $x \mapsto (x+1)^x = e^{x \ln(x+1)}$.

(a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x+1 > 0\} =]-1, +\infty[$.

(b) La fonction $x \mapsto x \ln(x+1)$ est définie sur $] -1, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $] -1, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $] -1, +\infty[$. Par composée avec l'exponentielle, la fonction f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et

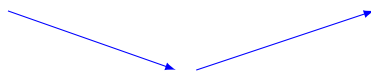
$$\forall x \in]-1, +\infty[, f'(x) = \left[\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \right] e^{x \ln(x+1)}$$

On veut étudier de la signe de $g : x \mapsto \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$.

Cette fonction est dérivable sur $] -1, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $] -1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]-1, +\infty[, g'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x+2}{(x+1)^2} > 0$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $] -1, +\infty[$. Elle ne s'annule donc qu'une seule fois. Or, $g(0) = 0$ donc f' ne s'annule qu'en 0.

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$-$	$+$
$f(x)$	$\parallel$		

(c) Calculons les limites. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Par composée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$f(0) = e^0 = 1.$$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} x \ln(x+1) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	$-$	$+$
$f(x)$	$\parallel$	