

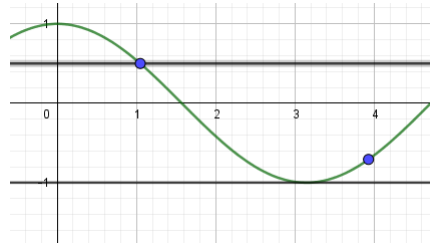
Exercice 1 Déterminer graphiquement les ensembles suivants.

1. $\sin \left(\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right] \right).$

Correction La fonction sinus est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right]$ donc $\sin \left(\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} \right] \right) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right].$

2. $\cos \left(\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{4} \right] \right).$

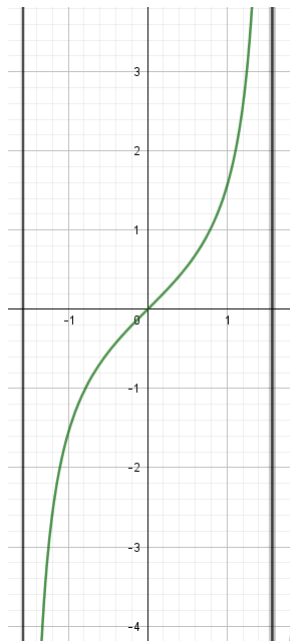
Correction Le graphe de la fonction cosinus est le suivant



On en déduit que $\cos \left(\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{4} \right] \right) = \left[-1; \frac{1}{2} \right].$

3. $\tan \left(\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right).$

Correction Le graphe de la fonction tangente est le suivant



La fonction tangente est croissante sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ avec $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty.$

On en déduit que $\tan \left(\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right) = \mathbb{R}.$

Exercice 2 Pour chacune des fonctions suivantes, donner leur ensemble de définition D_f et leur image $f(D_f)$.

Dire ensuite si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3.$

2. $f(x) = \sqrt{2x + 3} - 1$

3. $f(x) = |\sin(x)|$

Correction

1. $D_f = \mathbb{R}$ comme polynôme de degré 2 et $f(\mathbb{R}) = [-1; +\infty[$.

- (a) Injectivité? $f(1) = 0$ et $f(3) = 0$ donc on a proposé deux points différents qui ont le même image donc f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On va restreindre l'ensemble de départ pour rendre cette fonction injective.

Soit $(x, y) \in]2; +\infty[^2$ tel que $f(x) = f(y)$.

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 3 = y^2 - 4y + 3$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x = y^2 - 4y$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 - 4x + 4y = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + y) - 4(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + y - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = y \text{ ou } x + y = 4$$

Or, $x + y > 4$ donc on a $x = y$.

La fonction f est injective de $]2; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

- (b) Surjectivité? Soit $y \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un réel x tel que $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= y \\ x^2 - 4x + 3 - y &= 0 \\ \Delta &= 4(1 + y) \end{aligned}$$

Si $y < -1$, cette équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. La fonction f n'est pas une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Si $y \geq -1$, ce polynôme admet deux racines réelles et y a deux antécédents dans $\mathbb{R}$ par f .

La fonction f est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1; +\infty[$

- (c) Bijektivité? La fonction f est bijective de $]2; +\infty[$ dans $[-1; +\infty[$.

2. $D_f = \left] -\frac{3}{2}; +\infty \right[$ et $f(\mathbb{R}) = [-1; +\infty[$.

- (a) Injectivité? Soit $(x, y) \in D_f^2$, $f(x) = f(y)$.

$$\Rightarrow \sqrt{2x+3} - 1 = \sqrt{2y+3} - 1$$

$$\Rightarrow 2x + 3 = 2y + 3$$

$$\Rightarrow x = y$$

Donc la fonction est injective f de $\left] -\frac{3}{2}; +\infty \right[$ dans $f(\mathbb{R}) = [-1; +\infty[$.

- (b) Surjectivité? Soit $y \in [-1; +\infty[$.

$$\sqrt{2x+3} - 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{(y+1)^2 - 3}{2}$$

L'équation admet une unique solution donc f est bijective de $\left] -\frac{3}{2}; +\infty \right[$ dans $f(\mathbb{R}) = [-1; +\infty[$.

3. $D_f = \mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = [0, 1]$.

- (a) Injectivité? $f(\pi) = f(-\pi)$ donc f n'est pas injective de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.

- (b) Surjectivité? Soit $y \in [0, 1]$.

$$|\sin(x)| = y \Leftrightarrow \sin(x) = y \text{ ou } \sin(x) = -y$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \arcsin(y) + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \arcsin(y) + 2k\pi \text{ ou }$$

$$x = \arcsin(-y) + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \arcsin(-y) + 2k\pi$$

Donc, f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$.

Elle n'est pas bijective car il y a plusieurs antécédents.

Exercice 3 On considère l'application h définie par

$$h : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$$

1. Déterminer son ensemble de définition D_h .
2. Déterminer $h(D_h)$.
3. Montrer que h est une bijection de D_h sur $h(D_h)$.
4. Donner sa bijection réciproque.

Correction

1. $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

2. On va étudier les variations de h .

La fonction h est dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

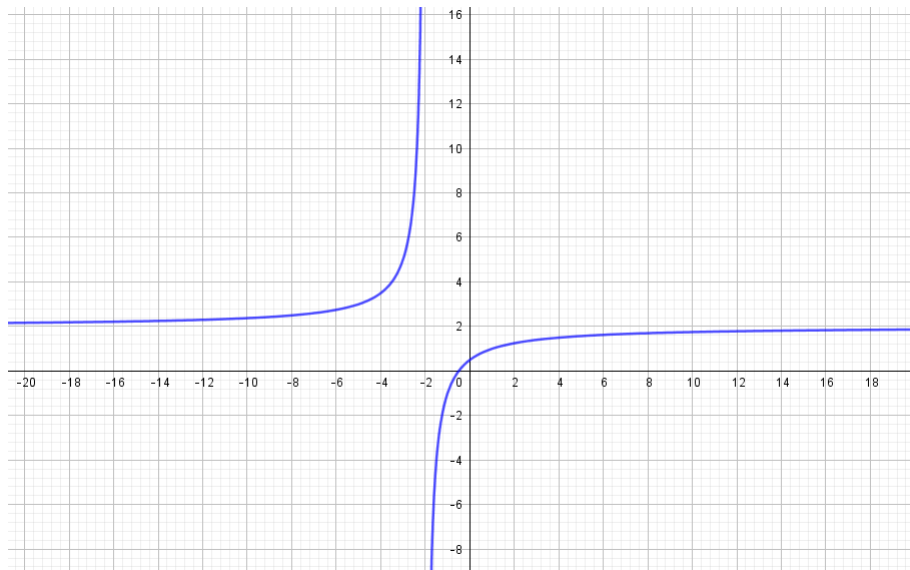
$$\forall x \in D_h, f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$$

Donc, h est strictement croissante sur $] -\infty; -2[$ et sur $] -2; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$$

On en déduit que $h(D_h) =] -\infty; 2[\cup] 2; +\infty[$.



3. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+2} = y &\Leftrightarrow 2x+1 = y(x+2) \\ &\Leftrightarrow x(2-y) = 2y-1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2y-1}{2-y} \end{aligned}$$

L'équation admet une unique solution donc h est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

4. La bijection réciproque est donnée par la résolution de l'équation précédente.

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ y \mapsto \frac{2y-1}{2-y} \end{cases}$$

Exercice 4 On considère l'application f définie par

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x - 2}$$

1. Déterminer son ensemble de définition D_f .
2. Déterminer $f(D_f)$.
3. L'application f est-elle injective sur D_f ?

Correction

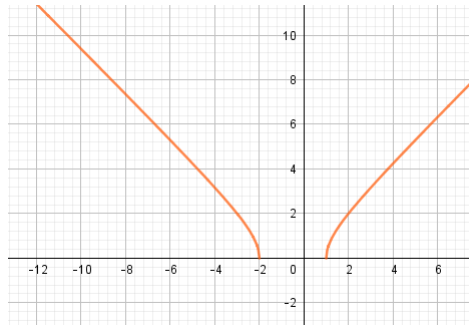
1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \geq 0\}$.
Le polynôme $x^2 + x - 2$ admet deux racines réelles $x_1 = -2$ et $x_2 = 1$ donc $D_f =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$.
2. On va étudier les variations de f sur D_f .
La fonction f est dérivable sur D_f comme composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 2}}$$

On en déduit que f est décroissante sur $] -\infty; -2]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$f(-2) = f(1) = 0. \text{ On en déduit que } f(D_f) = [0; +\infty[.$$



3. $f(-2) = f(1)$ donc la fonction n'est pas injective de D_f dans $f(D_f)$.

Exercice 5 On considère l'application g définie par

$$g : x \mapsto \sqrt{|x - 1|}$$

1. Déterminer son ensemble de définition D_g .
2. Déterminer $g(D_g)$.
3. L'application g est-elle injective sur D_g ?

Correction

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| \geq 0$ donc $D_g = \mathbb{R}$.
2. Pour dériver g , on va donner son expression sans la valeur absolue.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x} & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x - 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, g'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

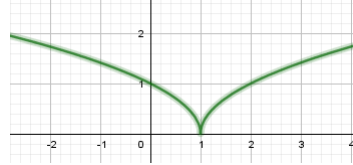
On en déduit que la fonction g est décroissante sur $] -\infty; 1[$ et croissante sur $]1; +\infty[$.

On étudie maintenant les limites aux bord pour en déduire $g(D_g)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

$$g(1) = 0 \text{ donc } g(D_g) = [0; +\infty[.$$

Le graphe de la fonction g est le suivant



3. Le graphe est celui d'une fonction non injective.

En effet, $g(1) = g(-1) = 0$ donc 0 admet deux antécédents par g .

On en déduit que g n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Soient E , F et G trois ensembles.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective de E dans G alors f est injective de E dans F .
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective de E dans G alors g est surjective de F dans G .

Correction Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et soit $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. Supposons la fonction $g \circ f$ injective de E dans G .

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.

$$\Rightarrow g[f(x)] = g[f(y)]$$

$$\Rightarrow x = y \text{ (car } g \circ f \text{ est injective)}$$

La fonction f est donc injective de E dans F .

2. Supposons la fonction $g \circ f$ surjective de E dans G . On veut montrer que g est surjective de F dans G .

Soit $y \in G$.

Puisque $g \circ f$ est surjective de E dans G , $\exists x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = y$

que l'on peut réécrire $g[f(x)] = y$. Or, $f(x) \in F$.

On notant $z = f(x)$, on a bien : $\exists z \in F$ tel que $g(z) = y$.

La fonction g est surjective de F dans G .

Exercice 7 Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \rightarrow F$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrer que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

Correction Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On va montrer l'égalité des ensembles par double inclusion.

$\subseteq$: Soit $y \in f(A \cup B)$.

$$\Rightarrow \exists x \in A \cup B \text{ tel que } y = f(x).$$

$$\Rightarrow (\exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)) \text{ ou } (\exists x \in B \text{ tel que } y = f(x)).$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B).$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \cup f(B).$$

On en déduit que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

$\supseteq$: Soit $y \in f(A) \cup f(B)$.

$$\Rightarrow y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B).$$

$$\Rightarrow \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x) \text{ ou } \exists x \in B \text{ tel que } y = f(x)$$

$\Rightarrow \exists x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$

$\Rightarrow y \in f(A \cup B)$.

On en déduit que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

On a montré par double inclusion que $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$.