Chapitre 10 : Dénombrement (prof)

Table des matières

1 Cardinal d'un ensemble.

1.1 Définitions.

Définition 1.

Soit E un ensemble.
On dit que E est <u>un ensemble fini</u> lorsqu'il contient un nombre fini d'éléments.
On appelle <u>cardinal de E</u> le nombre d'éléments de E.
On note $\text{Card}(E)$ ou $|E|$ ou $\#E$.

Exemple 2

1. $\varnothing$ est un ensemble fini de cardinal nul.
2. $[\![1, 12]\!]$ est un ensemble fini de cardinal 12.

Théorème 3.

Soient E et F deux ensembles finis.
E et F ont le même cardinal si, et seulement si, il existe une bijection entre les deux ensembles.

Démonstration : On raisonne par double implication.

- $\Rightarrow$ On suppose que E et F ont le même nombre d'éléments n.
  On a donc $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $F = \{y_1, \dots, y_n\}$.
  Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} E \to F \\ x_i \mapsto y_i \end{array} \right.$. C'est une bijection entre E et F.
- $\Leftarrow$ On suppose qu'il existe une bijection entre E et F.
  Chaque éléments de F a exactement un antécédent dans E par cette bijection. Donc, E et F ont le même nombre d'éléments. ■

Exemple 4 Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leq n$. $[\![m, n]\!]$ est un ensemble fini de cardinal $n - m + 1$.

On montre que $f : \left\{ \begin{array}{l} [\![m, n]\!] \to [\![1, n - m + 1]\!] \\ x \mapsto x - m + 1 \end{array} \right.$ est une bijection.

1.2 Cardinal d'une partie de E.

Théorème 5.

Soit E un ensemble fini. Soit A une partie de E ($A \in \mathcal{P}(E)$).

1. A est un ensemble fini et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$.
2. $\text{card}(A) = \text{card}(E) \Leftrightarrow A = E$.

Remarque 6 Le calcul du cardinal peut donc remplacer la démonstration de la double inclusion.

1.3 Cardinal d'une intersection ou d'une union.

Théorème 7.

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, deux parties de E.
Alors, $A \cap B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \cap B) \leq \min(\text{card}(A),\text{card}(B)).$$

Démonstration : Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. L'ensemble $A \cap B$ est inclus dans E.
Par le théorème précédent, $A \Cap B$ est aussi un ensemble fini. De plus,

- $A \cap B \subset A$ donc $\text{card}(A \cap B) \leq \text{card}(A)$
- $A \cap B \subset B$ donc $\text{card}(A \cap B) \leq \text{card}(B)$

Finalement, $\text{card}(A \cap B) \leq \min(\text{card}(A),\text{card}(B))$. ■

Théorème 8.

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, deux parties **disjointes** de E.
Alors, $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B).$$

Démonstration : Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, deux parties **disjointes** de E.
Cela signifie que A et B n'ont aucun élément en commun.
L'ensemble $A \cup B$ est constitué des éléments de A ajoutés à ceux de B, avec aucun doublon.
Pour les compter, on peut compter ceux de A et ceux de B séparément et les additionner.
D'où, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$. ■

Théorème 9.

Soit E un ensemble fini. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
Alors, $\overline{A}$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A).$$

Démonstration :
$\overline{A}$ est inclus dans E donc c'est aussi un ensemble fini.
A et $\overline{A}$ sont deux ensemble disjoints.
Par le théorème précédent, $\text{card}(\overline{A}) + \text{card}(A) = \text{card}(A \cup \overline{A})$.
Or, $A \cup \overline{A} = E$ donc $\text{card}(\overline{A}) + \text{card}(A) = \text{card}(E)$.
D'où le résultat. ■

Théorème 10 (Formule du Crible)**.**

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.
Alors, $A \cup B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Démonstration :
$A \cup B$ est inclus dans E donc c'est aussi un ensemble fini.
$A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$ et cette union est disjointe. Donc, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B \cap \overline{A})$.
De plus, $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$. Cette union est disjointe donc $\text{card}(B) = \text{card}(B \cap \overline{A}) + \text{card}(B \cap A)$.
Finalement, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$. ■

Exemple 11 Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.
Que pouvez-vous dire de $\text{card}(A \cup B \cup C)$?

On va appliquer deux fois la formule précédente.

$$\begin{aligned}
\text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A) + \text{card}(B \cup C) - \text{card}(A \cap (B \cup C)) \\
&= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap A \cap C) \\
&= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

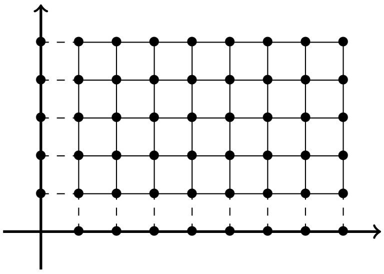
1.4 Cardinal d'un produit cartésien.

Théorème 12.

Soit E un ensemble fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.
Alors, $A \times B$ est un ensemble fini et

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B).$$

Démonstration : $A \times B = \{(x, y),\ x \in A, y \in B\}$.



On a créé $\text{card}(A) \times \text{card}(B)$ points d'où le résultat. ∎

Théorème 13.

Soit E un ensemble fini. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Alors, E^p est un ensemble fini et

$$\text{card}(E^p) = (\text{card}(E))^p .$$

Démonstration : On raisonne par récurrence.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n) : \text{card}(E^n) = (\text{card}(E))^n$.

- **I** La formule est vraie pour $n = 1$.
- **H** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P(n)$ est vraie.
  Par le théorème précédent, $\text{card}(E^{n+1}) = \text{card}(E^n \times E) = \text{card}(E^n) \times \text{card}(E)$.
  Par hypothèse de récurrence, $\text{card}(E^{n+1}) = \text{card}(E)^n \times \text{card}(E) = \text{catd}(E)^{n+1}$.
  Donc, l(hypothèse est vraie au rang $n + 1$.
- **C** Par le principe de récurrence, on obtient le résultat. ∎

2 Dénombrement.

2.1 Listes avec répétition.

Définition 14.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Pour $p \in \mathbb{N}$, on appelle $p-$liste ou $p-$uplet de E un élément de E^p.

Exemple 15 Pour $E = \{0, 2, 3, 12\}$, $(3, 2, 3)$ est un $3-$uplet de E.

Remarque 16 On rencontre des $p-$uplet lors de tirages **avec remise**.

Théorème 17.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Pour $p \in \mathbb{N}$, il y a exactement n^p $p-$uplets de E.

Démonstration : Les $p-$uplets sont des éléments de E^p. Par le théorème précédent, il y a en $\text{card}(E)^p = n^p$. ■

Exemple 18 Combien de nombres à 8 chiffres peut-on écrire ne contenant que des 1 et des 2 ?

On écrit des $8-$uplets de l'ensemble $E = \{1, 2\}$. Il y en a 2^8.

2.2 Listes sans répétition.

Définition 19.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Pour $p \in [\![1; n]\!]$, on appelle $p-$liste sans répétition une $p-$liste dont les éléments sont **distincts**.

Exemple 20 $(1, 2, 5)$ est une $3-$liste sans répétition de $[\![1; 12]\!]$.

Remarque 21 On rencontre des $p-$listes sans répétition lors de tirages **sans remise**.

Théorème 22.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Pour $p \in [\![1; n]\!]$, il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\dots(n-p+1)$ $p-$listes sans répétition de E.

Démonstration : Pour construire une $p-$liste sans répétition, on a

- n choix pour le premier élément,
- $n-1$ choix pour le deuxième élément car on ne veut pas le premier,
- $n-2$ choix pour le troisième élément,
- $\vdots$
- $n-(p-1)$ choix pour le $p-$ème élément car on ne veut aucun des $p-1$ éléments choisis avant.

Finalement, on a $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ $p-$listes sans répétition possibles. ■

Exemple 23 On dispose d'un jeu de 52 cartes. On tire 3 cartes successivement et sans remise. Combien y a-t-il de tirages possibles ? (L'ordre compte).

On fabrique des 3−listes sans répétition à partir d'un ensemble de cardinal 52 donc il y en a $52 \times 51 \times 50 = \dfrac{52!}{49!}$.

2.3 Permutations.

Définition 24.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
On appelle permutation de E un $n-$uplet de E contenant exactement une seule fois chaque élément de E.

Exemple 25 $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 2, 4, 6, 8, 10, 12)$ est une permutation de $[\![1; 12]\!]$.

Remarque 26 On rencontre des permutations lorsqu'on veut **trier les éléments** d'un ensemble.

Théorème 27.

Soit E un ensemble de cardinal n.
Il y a exactement $n!$ permutations de E.

Démonstration : Les permutations sont des $n-$listes d'un ensemble de cardinal n donc il y en a $\dfrac{n!}{(n-n)! = n!}$. ■

Exemple 28 Lors d'une compétition entre 8 sportives, combien y a-t-il de classements possibles ?

Chaque classement est une permutation de l'ensemble $E = [\![1, 8]\!]$ donc il y en a $8!$.

Exemple 29 Combien y a -t-il d'anagrammes du mot MATHS ?

Chaque anagramme est une permutation de l'ensemble $E = \{\mathrm{M}, \mathrm{A}, \mathrm{T}, \mathrm{H}, \mathrm{S}\}$ donc il y en a $5!$.

2.4 Combinaisons.

Définition 30.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Pour $p \in [\![1; n]\!]$, on appelle $p-$combinaison de E toute partie de E à p éléments.

Exemple 31 On rencontre des $p-$combinaisons lors de **tirages simultanés**.

Théorème 32.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Pour $p \in [\![1; n]\!]$, il y a exactement $\dbinom{n}{p}$ $p-$combinaisons de E.

Démonstration : Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$. Soit A une partie de E à p éléments.
A partir des éléments de A, on peut fabriquer $p!$ $p-$listes sans répétition de E.

Donc, il y a $p!$ fois plus de $p-$liste sans répétition que de $p-$combinaisons.

Donc, le nombre de $p-$combinaisons est $\dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dbinom{n}{p}$. ■

Exemple 33 De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ?

Chaque tirage est une $5-$combinaison d'un ensemble de cardinal 52 donc il y en a $\dbinom{52}{5}$.

2.5 Nombre de sous-parties d'un ensemble.

Théorème 34.

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n.$$

Démonstration : On écrit l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ comme une union disjointe. $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{p=0}^{n} \{A \in \mathcal{P}(E) \ / \ \mathrm{card}(A) = p\}$.

Donc, puisque ces unions sont disjointes, $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E) = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{card}\{A \in \mathcal{P}(E) \ / \ \mathrm{card}(A) = p\}$. Or,

- des parties à 0 élément. Il y en a $\dbinom{n}{0}$,
- des parties à 1 élément. Il y en a $\dbinom{n}{1}$,
- des parties à p éléments. Il y en a $\dbinom{n}{p}$,
- des parties à $n-1$ éléments. Il y en a $\dbinom{n}{n-1}$,
- des parties à n éléments. Il y en a $\dbinom{n}{n}$,

Finalement, $\mathrm{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{p=0}^{n} \dbinom{n}{p} = 2^n$. ■

Exemple 35 Si E est l'ensemble des nombres pairs entre 1 et 12, quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?

E est un ensemble de cardinal 6 donc $\mathcal{P}(E)$ est de cardinal 2^6.

3 A retenir.

3.1 Additionner ou multiplier des cardinaux ?

Pour déterminer un cardinal,

- Si l'ensemble que vous étudiez est une union disjointe de plusieurs ensembles,
  Alors, **vous additionnez** les cardinaux de chaque ensemble.
- Si l'ensemble que vous étudiez est un produit cartésien de plusieurs ensembles,
  Alors, **vous multipliez** les cardinaux de chaque ensemble.

3.2 Bien cerner la situation.

	Avec répétition	Sans répétition
Avec ordre	**Listes avec répétition** Pour $n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N}^*$ n^p	**Listes sans répétition** Pour $n \in \mathbb{N},\ p \leq n$ $\dfrac{n!}{(n-p)!}$
Sans ordre		**Combinaisons** Pour $n \in \mathbb{N},\ p \leq n$ $\dbinom{n}{p}$

4 Vision combinatoire des coefficients binomiaux (HP).

4.1 Symétrie des coefficients.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble à n éléments.
Soit $p \in [\![1; n]\!]$.
Choisir une partie de E à p éléments, c'est équivalent à choisir les $n-p$ éléments qui ne sont pas dans cette partie.
Donc, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$.

4.2 Version combinatoire du triangle de Pascal.

Soit E un ensemble à $n+1$ éléments. Soit $x \in E$. Soit $p \in [\![1; n]\!]$.
Parmi les $\dbinom{n+1}{p}$ parties de E à p éléments, il y a

- celles contenant x, il y en a $\dbinom{n}{p-1}$
- celles ne contenant pas x, il y en a $\dbinom{n}{p}$.

D'où $\dbinom{n+1}{p} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p-1}$.

4.3 Version combinatoire du binôme de Newton.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $n \in \mathbb{N}$.
Par définition : $(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)$.
Développer $(a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)$, c'est choisir un terme (a ou b) dans chaque parenthèse et les multiplier.
On obtient des produits de n termes qui sont tous des a ou des b.
Pour un $k \in [\![0; n]\!]$, le nombre de termes de la forme $a^k b^{n-k}$ est égal au nombre de produits avec k facteurs a et $n-k$ facteurs b.
Il y en a autant que de façons de choisir k parenthèses parmi les n possibles, c'est-à-dire $\dbinom{n}{k}$.
Pour chaque $k \in [\![0; n]\!]$, on a donc $\dbinom{n}{k}$ termes égaux à $a^k b^{n-k}$.
Finalement, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a^k b^{n-k}$.