Chapitre 11 : Suites réelles usuelles (prof)

Table des matières

1 Définitions

Définition 1.

On appelle <u>suite réelle</u> toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
On note souvent une suite sous la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Notation</u> u_n est le terme général de la suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspond à la suite et $\{u_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\} = u(\mathbb{N})$ est l'ensemble des valeurs prises par la suite u.

<u>Exemple 2</u>

- Soit la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + 4$.
- Soit la suite v définie par : pour $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique racine positive de $P = x^2 + nx + 4$.
- Soit la suite w définie par : $w_0 = 1$ et $\forall n \geq 2,\ w_{n+1} = \dfrac{3w_n - 5}{w_n + 1}$

2 Suites arithmétiques

Définition 3.

Soit $r \in \mathbb{R}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que la suite u est <u>arithmétique de raison r</u> lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.

<u>Méthode</u> Pour montrer qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, on peut montrer que : $\exists r \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$.

Théorème 4.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$.
2. $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p + (n-p)r$.
3. - Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   - Si $r = 0$ alors la suite est constante.
   - Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 5.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leq n$.

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{n} (u_0 + kr) = (n - m + 1) \times \frac{(u_m + u_n)}{2}$$

(nombre de termes) $\times$ (moyenne des termes extrêmes)

3 Suites géométriques

Définition 6.

Soit $q \in \mathbb{R}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que la suite u est géométrique de raison q lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$.

Théorème 7.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$.
2. Si $q \neq 0$, $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p \times q^{n-p}$.
3. - Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   - Si $q = 1$ alors la suite est constante.
   - Si $|q| > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 8.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$.

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{n} u_0.q^k = \begin{cases} (n-p+1) \times u_0 & \text{lorsque } q = 1 \\ u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} & \text{lorsque } q \neq 1 \end{cases}$$

4 Suites arithmético-géométriques

Définition 9.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique lorsque

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$$

Théorème 10.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

1. L'équation $x = ax + b$ admet une unique solution ℓ.
2. La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a.

Méthode *Etude d'une suite arithmético-géométrique* $u_{n+1} = au_n + b$.

1. Chercher la solution ℓ de l'équation $x = ax + b$.
2. Montrer que la suite $v_n = u_n - \ell$ est géométrique.
3. En déduire le terme général v_n en fonction de n et de v_0.
4. En déduire le terme général de u_n en fonction de n, de ℓ et de u_0.

Exemple 11 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+1} + 2u_n + 5 = 0$.
Déterminer le terme général de cette suite.

5 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2

Définition 12.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
On dit que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 lorsque

$$\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On appelle équation caractéristique l'équation $x^2 = ax + b$.

Exemple 13 La *suite de Fibonacci* est la suite définie par : $u_0 = 0,\ u_1 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Théorème 14.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Notons Δ le discriminant de son équation caractéristique $x^2 = ax + b$.

1. Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 et
$$\exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$
2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une racine double r_0 et
$$\exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (An + B)r_0^n$$
3. Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjugués $r_1 = r\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ et $r_2 = r\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\theta}$ et
$$\exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n\left[A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right]$$

Remarque 15 Les constantes A et B sont à déterminer à partir de u_0 et de u_1.

Exemple 16 Reprenons la suite de Fibonacci.