Exercice 1 Déterminer le terme général des suites suivantes

1. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n$.
2. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$.
3. $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - u_n$.
4. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$.

Exercice 2 Déterminer le terme général des suites suivantes

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{4}{5}u_n - \dfrac{5}{2}u_{n+1}$.

Exercice 3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$u_0 = 1,\ w_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2w_n \text{ et } w_{n+1} = 3w_n + 2u_n$$

1. Calculer u_1, w_1, u_2 et w_2.
2. Montrer que la suite $(u_n - w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
4. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geq 0$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe et $u_n \geq 0$.
3. On définit une suite auxiliaire $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   Montrer que cette suite est géométrique.
4. En déduire le terme de général de la suite t en fonction de n.
5. En déduire celui de la suite u.

Exercice 5 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{u_n}}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à termes strictement positifs.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n)$. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire ensuite l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$?
6. Écrire une fonction python `suite(n)` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie le terme u_n. On rappelle que la racine carrée est obtenue par la commande `sqrt`.
7. Écrire une fonction python `somme(n)` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$. On pourra utiliser la fonction `suite` de la question précédente, ou pas (2 solutions possibles).

Exercice 6 On considère une suite réelle (u_n) qui vérifie $u_0 = u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$(R) :\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 5u_n$$

1. On note α l'unique réel de l'intervalle $[0, \pi]$ vérifiant $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
   Justifier que $\dfrac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et donner la valeur de $\sin(\alpha)$.
2. Déterminer u_n en fonction de n, de u_0 et de α.
3. Exprimer la somme des n premiers termes de la suite u en fonction de n, de u_0 et de α.