Chapitre 12 : Equations différentielles linéaires

Table des matières

1	Calcul de primitives	2
1.1	Définition	2
1.2	Existence	2
1.3	Primitives usuelles	3
1.4	Primitives de composées de fonctions	4
2	Equations différentielles linéaires du premier ordre	4
2.1	Définitions	4
2.2	Résolution d'une équation homogène du premier ordre	4
2.3	Résolution d'une équation avec second membre	5
2.4	Recherche d'une solution particulière	5
2.5	Principe de superposition	6
2.6	Avec des conditions initiales	6
3	Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	6
3.1	Résolution de l'équation homogène associée	7
3.2	Résolution d'une équation du second ordre avec second membre	7
3.3	Principe de superposition	8
3.4	Avec conditions initiales	8

1 Calcul de primitives

1.1 Définition

Définition 1.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$.
On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I telle que
 $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Exemple 2 La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est une primitive de $x \mapsto \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3 La fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

1.2 Existence

Théorème 4.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
Si f est continue sur I alors f admet des primitives sur I .

Théorème 5.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I . Soit F une primitive de f sur I .
L'ensemble des primitives de f sur I est

$$\{F + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 6 Donner l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \frac{1}{x^3}$.

1.3 Primitives usuelles

Fonction f	Intervalle I	Primitive F
$x \mapsto \lambda$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}_+^*$	
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	
$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \cos(\lambda x)$ pour $\lambda \neq 0$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \sin(\lambda x)$ pour $\lambda \neq 0$	$\mathbb{R}$	
$x \mapsto \tan(x)$	$\left] \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$ pour $k \in \mathbb{Z}$	
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	

1.4 Primitives de composées de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I .

Fonction f	Primitive F sur I
$u'u^n$ pour $n \in \mathbb{N}$	
$u'e^u$	
$\frac{u'}{u}$	
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	
$u' \sin(u)$	
$u' \cos(u)$	

2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

2.1 Définitions

Définition 7.

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre une équation de la forme

$$(E) : y' + a(t)y = f(t)$$

où a et f sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Résoudre (E) sur un intervalle J , c'est trouver l'ensemble des fonctions $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur J et qui vérifient (E) :

$$\forall t \in J, y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

2.2 Résolution d'une équation homogène du premier ordre

Théorème 8.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit l'équation $(E_H) : y' + ay = 0$.

L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S}_H = \{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-at}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 9 Résoudre l'équation $y' - 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 10.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I .

Soit A une primitive de a sur I .

L'ensemble $\mathcal{S}_H(I)$ des solutions de $(E_H) : y' + a(t)y = 0$ sur I est

$$\mathcal{S} = \left\{ t \in I \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple 11 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $y' - \frac{1}{t}y = 0$.

Exemple 12 Résoudre l'équation $y' + \tan(t)y = 0$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

2.3 Résolution d'une équation avec second membre

Théorème 13.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I . Soit A une primitive de a sur I .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I .

Soit $(E) : y' + a(t)y = f(t)$.

Soit y_p une solution particulière de (E) .

L'ensemble S des solutions de (E) sur I est

$$S = \left\{ t \in I \mapsto y_p(t) + \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple 14 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + 2y = -1$.

Exemple 15 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' - y = \cos(t) - \sin(t)$.

2.4 Recherche d'une solution particulière

Exemple 16 Trouver une solution particulière de l'équation $y' + ty = t$.

Exemple 17 Trouver une solution particulière de l'équation $y' \sin(t) + y \cos(t) = \sin(2t)$.

Théorème 18.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I . Soit A une primitive de a sur I .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I .

Soit $(E) : y' + a(t)y = f(t)$.

Il existe des solutions particulières de la forme $y_p : t \in I \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$ où λ est une fonction définie et dérivable sur I .

Exemple 19 Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation $y' - \frac{1}{t}y = t^2$.

Exemple 20 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + y = \frac{1}{1 + e^t}$.

Methode 1.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre sur un intervalle I ,

1. on résout l'équation homogène associée (E_H) sur I ,
2. on cherche une solution particulière sur I ,
3. on additionne ces deux solutions pour obtenir les solutions de (E) sur I .

Il y a une infinité de solutions à l'équation (E_H) donc une infinité de solutions à (E) .

2.5 Principe de superposition**Théorème 21.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continues sur I .

Soit $(E) : y' + a(t)y = f(t)$ avec $\forall t \in I, f(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)$.

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit y_k une solution sur I de $(E_k) : y' + a(t)y = f_k(t)$.

Alors, la fonction définie par $y_p = \sum_{k=1}^n y_k$ est une solution particulière de (E) .

2.6 Avec des conditions initiales**Théorème 22.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continues sur I .

Soient $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$.

Il existe une unique fonction solution sur I du système suivant :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Remarque 23

- La condition initiale impose la valeur de λ dans le théorème 5.
- Ce théorème permet de démontrer l'existence de la fonction exponentielle.

Exemple 24 Résoudre sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ le système $\begin{cases} y' + y \tan(t) = \sin(2t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants**Définition 25.**

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une équation de la forme

$$(E) : y'' + ay' + by = f(t)$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et f est une fonction définie et continue sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3.1 Résolution de l'équation homogène associée

Définition 26.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, continue sur I . Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Soit $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$.

On appelle équation homogène associée à (E) l'équation $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$.

On appelle équation caractéristique associée à (E_H) l'équation $\mathbf{X}^2 + a\mathbf{X} + b = 0$.

Théorème 27.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Soit $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$.

Notons $\Delta = a^2 - 4b$ le discriminant de $\mathbf{X}^2 + a\mathbf{X} + b = 0$.

1. Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 et l'ensemble des solutions de l'équation (E_H) sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

2. Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une unique racine r_0 et l'ensemble des solutions de l'équation (E_H) sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto (At + B)e^{r_0 t}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

3. Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et l'ensemble des solutions de l'équation (E_H) est

$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto e^{\alpha t}(A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)), (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Remarque 28 Dans le dernier cas, on peut écrire les solutions sous la forme $t \mapsto Ae^{\alpha t} \cos(\beta t + \phi)$.

Exemple 29 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + 2y = 0$.

3.2 Résolution d'une équation du second ordre avec second membre

Théorème 30.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$, continue sur I . Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Soit $(E) : y'' + ay' + by = f(t)$.

On suppose qu'il existe y_p une solution particulière de (E) .

Toute solution de (E) est la somme d'une solution de l'équation homogène (E_H) et de la solution particulière y_p .

$$S = \{y_h + y_p \text{ avec } y_h \in \mathcal{S}_H\}$$

Exemple 31 Résoudre l'équation $y'' + 4y = 1$.

Exemple 32 Résoudre l'équation $y'' + y = \cos(2t)$.

Methode 2.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre sur $\mathbb{R}$,

1. on résout l'équation homogène associée (E_H) sur $\mathbb{R}$,
2. on cherche une solution particulière "qui ressemble au second membre",
3. on additionne ces deux solutions pour obtenir les solutions de (E) .

Il y a une infinité de solutions à l'équation (E_H) donc une infinité de solutions à (E) .

3.3 Principe de superposition**Théorème 33.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t).$$

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit y_k une solution sur I de $(E_k) : y'' + ay' + by = f_k(t)$.

La fonction définie par $y_p(x) = \sum_{k=1}^n y_k$ est une solution particulière de (E) .

Exemple 34 Résoudre dans $\mathbb{R}$ de $y'' - 3y' + 2y = e^{-t} + 1$.

3.4 Avec conditions initiales**Théorème 35.**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I .

Soient $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{R}^2$.

Il existe une unique fonction solution sur I au système suivant :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

Remarque 36 Les conditions initiales permettent de déterminer les réels A et B du théorème 9.

Exemple 37 Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système suivant $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$