Exercice 1 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle I à préciser.

1. $f : x \in I \mapsto \mathbf{e}^{3x}$.
2. $f : x \in I \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{5}\right)$.
3. $f : x \in I \mapsto x^5 - 3x + 1$.
4. $f : x \in I \mapsto \ln(x+1)$.
5. $f : x \in I \mapsto \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
6. $f : x \in I \mapsto x\mathbf{e}^{x^2}$.
7. $f : x \in I \mapsto \cos(x)\sin^3(x)$.
8. $f : x \in I \mapsto \dfrac{x}{x^2+4}$.
9. $f : x \in I \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

Correction

1. $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{3x}}{3}$.
2. $F : x \in \mathbb{R} \mapsto -5\cos\left(\dfrac{x}{5}\right)$.
3. $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{3x^2}{2} + x$.
4. $F : x \in]-1, +\infty[\mapsto (x+1)\ln(x+1) - (x+1)$.
5. $I = \mathbb{R}$. $\forall x \in I,\ f(x) = \cos(2x)$ donc $F : x \in I \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{2}$.
6. $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{x^2}}{2}$.
7. $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\sin^4(x)}{4}$.
8. $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+4)$.
9. $F : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sqrt{2x}$.

Exercice 2 Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos^2(x)\sin^3(x)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $f(x)$.
2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On utilise la formule d'Euler

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}}{2}\right)^2 \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}\right)^3 \\ &= \frac{(\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x} + 2 + \mathbf{e}^{-2\mathbf{i}x})(\mathbf{e}^{3\mathbf{i}x} - 3\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} + 3\mathbf{e}^{-\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-3\mathbf{i}x})}{-32\mathbf{i}} \\ &= \frac{\mathbf{e}^{5\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-3\mathbf{i}x} - 2\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} + 2\mathbf{e}^{-\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{-3\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-5\mathbf{i}x}}{-32\mathbf{i}} \\ &= \frac{\sin(5x) - \sin(3x) - 2\sin(x)}{-16} \end{aligned}$$

2. La fonction $F : x \mapsto \dfrac{-\cos(5x)}{5 \times (-16)} + \dfrac{\cos(3x)}{3 \times (-16)} + \dfrac{\cos(x)}{8}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 Soit $f : t \in]-1, 1[\mapsto \dfrac{1}{t^2 - 1}$. Soit $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 + t - 2}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall t \in]-1, 1[,\ f(t) = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}$$

2. En déduire une primitive de f sur $]-1,1[$.
3. Déterminer un intervalle I sur lequel g admet des primitives.
4. Montrer qu'il existe $(a,b,t_1,t_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall t \in I,\ g(t) = \frac{a}{t-t_1} + \frac{b}{t-t_2}$$

5. En déduire une primitive de g sur I.

Correction Soit $f : t \in]-1,1[\mapsto \dfrac{1}{t^2-1}$. Soit $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+t-2}$.

1. Supposons que $(a,b) \in \mathbb{R}$ existe. Soit $t \in]-1,1[$.
   $\dfrac{a}{t-1} + \dfrac{b}{t+1} = \dfrac{at+a+bt-b}{(t-1)(t+1)}$
   Donc, $f(t) = \dfrac{a}{t-1} + \dfrac{b}{t+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{t^2-1} = \dfrac{(a+b)t+a-b}{t^2-1} \Leftrightarrow (a+b)t+a-b = 1$.
   L'égalité doit être vrai pour tout t donc $a+b=0$ et $a-b=1$.
   Donc, $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = \dfrac{-1}{2}$.
   On vérifie que ça convient : $\forall t \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{2(t-1)} + \dfrac{1}{2(t+1)} = \dfrac{1}{t^2-1}$.
2. On en déduit que $F : t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(t-1) - \dfrac{1}{2}\ln(t+1)$ est une primitive de f sur $]-1,1[$.
3. La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ donc g admet des primitives sur $I_1 =]-\infty,-2[$, sur $I_2 =]-2,1[$ ou sur $I_3 =]1,+\infty[$.
4. Prenons $I = I_2$. On sait qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in I,\ g(t) = \frac{1}{(t+2)(t-1)} = \frac{a}{t+2} + \frac{b}{t-1}$$

   Donc, $\forall t \in I,\ g(t) = \dfrac{(a+b)t-a+2b}{(t+2)(t-1)} = \dfrac{1}{(t+2)(t-1)}$.
   Donc, $a+b=0$ et $-a+2b=1$.
   Donc, $a=-b$ et $3b=1$.
   Donc $a = \dfrac{-1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$.
5. On a donc $\forall t \in I,\ g(t) = \dfrac{-1}{3(t+2)} + \dfrac{1}{3(t-1)}$.
   On en déduit que $G : t \in I \mapsto \dfrac{-1}{3}\ln(t+2) + \dfrac{1}{3}\ln(t-1)$ est une primitive de g sur I.

Exercice 4 Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. $y' + y = 4\mathbf{e}^t$ sur $\mathbb{R}$.
3. $y' - 3y = \mathbf{e}^t + 3$ sur $\mathbb{R}$.
   On pourra appliquer le principe de superposition pour trouver une solution particulière.
4. $y' + \tan(t)y = \cos(t)$ sur $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
5. $(1-t^2)y' - 2ty = t^2$ sur $I =]-1,1[$.

Correction

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants homogène.
   Donc $S_H = \{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda\mathbf{e}^{-2t},\ \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation homogène associée

$$(E_H) \quad : \quad y' + y = 0$$

donc $S_H = \{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-t}, \ \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
On cherche ensuite une solution particulière par variation de la constante sous la forme $y_p(t) = \lambda(t)\mathbf{e}^{-t}$. On a donc $\forall t \in \mathbb{R},\ y_p'(t) = \lambda'(t)\mathbf{e}^{-t} - \lambda(t)\mathbf{e}^{-t} = [\lambda'(t) - \lambda(t)]\mathbf{e}^{-t}$.

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad y_p' + y_p = 4\mathbf{e}^t \\ &\Leftrightarrow \quad [\lambda'(t) - \lambda(t)]\mathbf{e}^{-t} + \lambda(t)\mathbf{e}^{-t} = 4\mathbf{e}^t \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda'(t)\mathbf{e}^{-t} = 4\mathbf{e}^t \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda'(t) = 4\mathbf{e}^{2t} \end{aligned}$$

On peut prendre $\lambda(t) = 2\mathbf{e}^{2t}$. Ainsi, la fonction $y_p : t \mapsto 2\mathbf{e}^{2t}\mathbf{e}^{-t} = 2\mathbf{e}^t$ est une solution particulière de (E).
Pour avoir la forme générale des solutions, il reste à faire la somme de la solution de l'équation homogène et de la solution particulière

$$S_E(\mathbb{R}) = \left\{t \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-x} + 2\mathbf{e}^t,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

3. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation homogène

$$(E_H) \quad : \quad y' - 3y = 0$$

Donc $S_H = \{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \mathbf{e}^{3t}, \ \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
On applique le principe de superposition pour déterminer une solution particulière.

- On cherche une solution particulière de $(E_1) \ : \ y' - 3y = \mathbf{e}^t$ sous la forme $y_p(t) = \lambda(t)\mathbf{e}^{3t}$. On a donc $\forall t \in \mathbb{R},\ y_p'(t) = \lambda'(t)\mathbf{e}^{3t} + 3\lambda(t)\mathbf{e}^{3t} = [\lambda(t) + 3\lambda'(t)]\mathbf{e}^{3t}$.

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad y_p' - 3y_p = \mathbf{e}^t \\ &\Leftrightarrow \quad [\lambda'(t) + 3\lambda(t)]\mathbf{e}^{3t} - 3\lambda(t)\mathbf{e}^{3t} = \mathbf{e}^t \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda'(t)\mathbf{e}^{3t} = \mathbf{e}^t \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda'(t) = \mathbf{e}^{-2t} \end{aligned}$$

  On peut prendre $\lambda(t) = \dfrac{\mathbf{e}^{-2t}}{-2}$. Ainsi, la fonction $y_p : t \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{-2t}}{-2}\mathbf{e}^{3t} = \dfrac{-\mathbf{e}^t}{2}$ est une solution particulière de (E_1).
- $y_p = -1$ est une solution particulière de $(E_2) \ : \ y' - 3y = 3$.

Par le principe de superposition, $y_p(t) = 3 - \dfrac{\mathbf{e}^t}{2}$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.
Finalement,

$$S_E(\mathbb{R}) = \left\{t \mapsto \lambda\mathbf{e}^{3t} + 3 - \frac{\mathbf{e}^t}{2},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

4. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation homogène

$$(E_H) \quad : \quad y' + \tan(t)y = 0$$

donc $S_H = \left\{ t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \lambda \mathbf{e}^{\ln(|\cos(t)|)} = \lambda \cos(t),\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ car la fonction cos est positive sur I.
On cherche ensuite une solution particulière par variation de la constante sous la forme $y_p(t) = \lambda(t)\cos(t)$. On a donc $\forall t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[,\ y_p'(t) = \lambda'(t)\cos(t) - \lambda(t)\sin(t)$

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de (E)} &\Leftrightarrow y_p' + \tan(t) y_p = \cos(t) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(t)\cos(t) - \lambda(t)\sin(t) + \tan(t)\lambda(t)\cos(t) = \cos(t) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(t) = 1 \end{aligned}$$

On peut prendre $\lambda(t) = t$. Ainsi, la fonction $y_p : t \mapsto t\cos(t)$ est une solution particulière de (E).
L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \left\{ t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \lambda\cos(t) + t\cos(t),\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

5. On doit commencer par normaliser (E). $\forall t \in I,\ 1 - t^2 \neq 0$ donc $(E) \Leftrightarrow y' - \frac{2t}{1-t^2} y = \frac{t^2}{1-t^2}$.
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation homogène associée

$$(E_H) \quad : \quad y' - \frac{2t}{1-t^2} y = 0$$

La fonction $t \mapsto \ln(1-t^2)$ est une primitive de $a : t \mapsto -\frac{2t}{1-t^2}$ sur I
donc $S_H = \left\{ t \in I \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-\ln(1-t^2)} = \frac{\lambda}{1-t^2},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.
Nous cherchons ensuite une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \frac{\lambda(t)}{1-t^2}$ par la méthode de la variation de la constante.

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow y_p' - \frac{2t}{1-x^t} y_p = \frac{t^2}{1-t^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda'(t)(1-t^2) + 2t\lambda(t)}{(1-t^2)^2} - \frac{2t}{1-t^2}\frac{\lambda(t)}{t^2-1} = \frac{t^2}{1-t^2} \\ &\Leftrightarrow \lambda'(t) = t^2 \end{aligned}$$

La fonction $y_p(t) = \frac{t^3}{3(1-t^2)}$ est une solution particulière sur $]-1, 1[$.
Finalement, $S = \left\{ t \in I \mapsto \frac{3\lambda + t^3}{3(1-t^2)},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 5 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = \sin(t)$
   On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t)$.
2. $y'' - y' - 6y = \mathbf{e}^{3t} + \sin(t)$
   On applique le principe de superposition et on cherche une solution particulière de $y'' - y' - 6y = \mathbf{e}^{3t}$ sous la forme $t \mapsto At\mathbf{e}^{3t}$ et pour $y'' - y' - 6y = \sin(t)$ sous la forme $t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t)$.
3. $y'' - 3y' + 4y = 6x^2 + 1$
   On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré au plus 2.

Correction

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$(E_H) \quad : \quad y'' - 4y' + 4y = 0$$

dont l'équation caractéristique est $x^2 - 4x + 4 = 0$, c'est-à-dire $(x-2)^2 = 0$. Donc,

$$S_H = \left\{ t \mapsto (At+B)\mathbf{e}^{2t}, \ \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$.

$$\begin{aligned}
y_p \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad y_p'' - 4y_p' + 4y_p = \sin(t) \\
&\Leftrightarrow \quad -A\cos(t) - B\sin(t) - 4(-A\sin(t) + B\cos(t)) + 4(A\cos(t) + B\sin(t)) = \sin(t) \\
&\Leftrightarrow \quad (3A - 4B)\cos(t) + (3B + 4A)\sin(t) = \sin(t) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3A - 4B = 0 \\ 3B + 4A = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad A = \frac{4}{25} \text{ et } B = \frac{3}{25}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$S = \left\{ t \mapsto (At+B)\mathbf{e}^{2t} + \frac{3}{25}\sin(t) + \frac{4}{25}\cos(t), \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$(E_H) \quad : \quad y'' - y' - 6y = 0$$

dont l'équation caractéristique est $x^2 - x - 6 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = 1 + 24 = 25$. Donc,

$$S_H = \left\{ t \mapsto A\mathbf{e}^{-2t} + B\mathbf{e}^{3t}, \ \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Nous allons appliquer le principe de superposition pour trouver une solution particulière.

- On cherche une solution particulière de $(E_1) \ : \ y'' - y' - 6y = \mathbf{e}^{3t}$ sous la forme $y_p(t) = At\mathbf{e}^{3t}$.

$$\begin{aligned}
y_p \text{ est solution de } (E_1) \quad &\Leftrightarrow \quad y_p'' - y_p' - 6y_p = \mathbf{e}^{3t} \\
&\Leftrightarrow \quad (6A + 9tA - (A + 3At) - 6At)\mathbf{e}^{3t} = \mathbf{e}^{3t} \\
&\Leftrightarrow \quad 5A = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

  La fonction $y_p(t) = \frac{t}{5}\mathbf{e}^{3t}$ est une solution particulière de (E_1).

- On cherche une solution particulière de $(E_2) \ : \ y'' - y' - 6y = \sin(t)$ sous la forme $y_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$.

$$\begin{aligned}
y_p \text{ est solution de } (E_2) \quad &\Leftrightarrow \quad y_p'' - y_p' - 6y_p = \sin(t) \\
&\Leftrightarrow \quad (-B - 7A)\cos(t) + (A - 7B)\sin(t) = \sin(t) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -B - 7A = 0 \\ A - 7B = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{50} \text{ et } B = \frac{-7}{50}
\end{aligned}$$

  Donc, $y_p(t) = \frac{-7}{50}\sin(t) + \frac{1}{50}\cos(t)$ est une solution particulière de (E_2).

Par le principe de superposition, $y_p(t) = \frac{t}{5}\mathbf{e}^{3t} + \frac{-7}{50}\sin(t) + \frac{1}{50}\cos(t)$ est une solution particulière de (E). Donc,

$$S = \left\{ t \mapsto A\mathbf{e}^{-2t} + B\mathbf{e}^{3t} + \frac{t}{5}\mathbf{e}^{3t} - \frac{7}{50}\sin(t) + \frac{1}{50}\cos(t),\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre.
   Nous allons d'abord résoudre l'équation homogène associée

$$(E_H)\ :\ y'' - 3y' + 4y = 0$$

   L'équation caractéristique associée est : $x^2 - 3x + 4 = 0$ dont les racines sont $z_1 = \frac{3 + \mathbf{i}\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \frac{3 - \mathbf{i}\sqrt{7}}{2}$. Donc,

$$S_H = \left\{ t \mapsto \mathbf{e}^{\frac{3t}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \right) \quad , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

   On cherche ensuite une solution paticulière sous la forme $y_p(t) = at^2 + bt^2 + c$.

$$\begin{aligned}
y_p \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad y_p'' - 3y_p' + 4y_p = 6t^2 + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2a - 3(2at + b) + 4(at^2 + bt + c) = 6t^2 + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a = 6 \\ -6a + 4b = 0 \\ 2a - 3b + 4c = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{9}{4} \\ c = \frac{1 - 2a + 3b}{4} = \frac{19}{16} \end{cases}
\end{aligned}$$

   Donc,

$$S = \left\{ t \mapsto \mathbf{e}^{\frac{3t}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) \right) + \frac{3}{2}t^2 + \frac{9}{4}t^2 + \frac{19}{16} \quad , \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 6 Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathbf{e}^t}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 1$.
2. $y'' + y' - 2y = 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.
3. $y'' = 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
4. $y'' + 9y = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.
   On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré au plus 2.

Correction

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. On résout d'abord l'équation homogène associée
$$(E_H)\ :\ y' + y = 0$$
Donc $S_H = \{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-t},\ \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
On cherche une solution particulière par variation de la constante : $y_p(t) = \lambda(t)\mathbf{e}^{-t}$.
$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad y_p' + y_p = \frac{1}{1+\mathbf{e}^t} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda'(t)\mathbf{e}^{-t} - \lambda(t)\mathbf{e}^{-t} + \lambda(t)\mathbf{e}^{-t} = \frac{1}{1+\mathbf{e}^t} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda'(t) = \frac{\mathbf{e}^t}{1+\mathbf{e}^t} \end{aligned}$$
On peut prendre $\lambda(t) = \ln(1+\mathbf{e}^t)$ et donc $y_p(t) = \ln(1+\mathbf{e}^t)\mathbf{e}^{-t}$. Donc,
$$S = \left\{t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \mathbf{e}^{-t} + \ln(1+\mathbf{e}^t)\mathbf{e}^{-t},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$
Puis, on cherche l'unique fonction telle que $y(0) = 1$.
$$\begin{aligned} y(0) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 = \lambda \mathbf{e}^{-0} + \ln(1+\mathbf{e}^0)\mathbf{e}^{-0} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 = \lambda + \ln(2) \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - \ln(2) = \lambda \end{aligned}$$
Donc l'unique solution de (E) telle que $y(0) = 1$ est $y : t \in \mathbb{R} \mapsto (1-\ln(2))\mathbf{e}^{-t} + \ln(1+\mathbf{e}^t)\mathbf{e}^{-t}$
2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation sans second membre
$$(E_H)\quad :\quad y'' + y' - 2y = 0$$
dont l'équation caractéristique est $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0$. Donc,
$$S_H = \left\{t \in \mathbb{R} \mapsto A\mathbf{e}^t + B\mathbf{e}^{-2t},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
$y_p = \dfrac{-1}{2}$ est une solution particulière de (E) donc
$$S = \left\{t \in \mathbb{R} \mapsto A\mathbf{e}^t + B\mathbf{e}^{-2t} - \frac{1}{2},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
On cherche ensuite l'unique solution telle que $y(0) = y'(0) = 0$.
$$\Rightarrow \begin{cases} A + B - \frac{1}{2} = 0 \\ A - 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3B = \frac{1}{2} \\ A = 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{6} \\ A = \frac{1}{3} \end{cases}$$
Donc, l'unique solution est $y : t \mapsto \dfrac{1}{3}\mathbf{e}^t + \dfrac{1}{6}\mathbf{e}^{-2t} - \dfrac{1}{2}$.

3. $y'' = 1 \Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{R}$ tel que $y'(t) = t + a \Rightarrow \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(t) = \dfrac{t^2}{2} + at + b$.
   $y(0) = y'(0) = 1 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$
   Donc l'unique solution est $y : t \mapsto \dfrac{t^2}{2} + t + 1$.
4. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre. On commence par résoudre l'équation sans second membre
   $$(E_H) \quad : \quad y'' + 9y = 0$$
   dont l'équation caractéristique est $x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3\mathbf{i})(x + 3\mathbf{i}) = 0$. Donc,
   $$S_H = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto A\cos(3t) + B\sin(3t),\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
   On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y_p(t) = at^2 + bt + c$.
   $$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad y'' + 9y = t^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2a + 9(at^2 + bt + c) = t^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 9a = 1 \\ 9b = 0 \\ 2a + 9c = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{9} \\ b = 0 \\ c = \dfrac{1 - 2a}{9} = \dfrac{7}{81} \end{cases} \end{aligned}$$
   Donc
   $$S = \left\{ t \in \mathbb{R} \mapsto A\cos(3t) + B\sin(3t) + \frac{t^2}{9} + \frac{7}{81},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
   On cherche ensuite la solution particulière telle que $y(0) = y'(0) = 0$.
   $\Rightarrow \begin{cases} A + B + \dfrac{7}{81} = 0 \\ 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{7}{81} \\ B = 0 \end{cases}$
   Donc, l'unique solution est $y : t \mapsto -\dfrac{7}{81}\cos(3t) + \dfrac{t^2}{9} + \dfrac{7}{81}$

Exercice 7 On cherche à résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation suivante
$$(E) \ : \ t^2 y'' + 4ty' - (t^2 - 2)y = 0$$

1. Pour $t \in]0; +\infty[$, on pose $z(t) = t^2 y(t)$.
   Calculer z' et z''.
2. En déduire une équation différentielle linéaire (E') dont z est solution.
3. Résoudre cette équation (E').
4. En déduire les solutions de l'équation initiale (E).

Correction

1. La fonction z est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et
   $$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z'(t) &= 2ty(t) + t^2 y'(t) \\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(t) &= 2[y(t) + ty'(t)] + 2ty'(t) + t^2 y''(t) = t^2 y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) \\ &= t^2 y(t) = z(t) \end{aligned}$$

2. Donc, z est solution de l'équation $(E') : y'' - y = 0$.
3. L'équation caractéristique est $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0$. Donc,

$$S' = \left\{ t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto A\mathbf{e}^t + B\mathbf{e}^{-t},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

4. On retrouve ensuite une expression pour y en utilisant que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ y(t) = \dfrac{z(t)}{t^2}$. D'où,

$$S = \left\{ t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{A\mathbf{e}^t + B\mathbf{e}^{-t}}{t},\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$