<u>Exercice 1</u> Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle I à préciser.

1. $f : x \in I \mapsto \mathbf{e}^{3x}$.
2. $f : x \in I \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{5}\right)$.
3. $f : x \in I \mapsto x^5 - 3x + 1$.
4. $f : x \in I \mapsto \ln(x+1)$.
5. $f : x \in I \mapsto \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
6. $f : x \in I \mapsto x\mathbf{e}^{x^2}$.
7. $f : x \in I \mapsto \cos(x)\sin^3(x)$.
8. $f : x \in I \mapsto \dfrac{x}{x^2+4}$.
9. $f : x \in I \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

<u>Exercice 2</u> Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos^2(x)\sin^3(x)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $f(x)$.
2. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 3</u> Soit $f : t \in]-1,1[\mapsto \dfrac{1}{t^2-1}$. Soit $g : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+t-2}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que
$$\forall t \in]-1,1[,\ f(t) = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}$$
2. En déduire une primitive de f sur $]-1,1[$.
3. Déterminer un intervalle I sur lequel g admet des primitives.
4. Montrer qu'il existe $(a,b,t_1,t_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que
$$\forall t \in I,\ g(t) = \frac{a}{t-t_1} + \frac{b}{t-t_2}$$
5. En déduire une primitive de g sur I.

<u>Exercice 4</u> Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. $y' + y = 4\mathbf{e}^t$ sur $\mathbb{R}$.
3. $y' - 3y = \mathbf{e}^t + 3$ sur $\mathbb{R}$.
On pourra appliquer le principe de superposition pour trouver une solution particulière.
4. $y' + \tan(t)y = \cos(t)$ sur $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
5. $(1-t^2)y' - 2ty = t^2$ sur $I =]-1,1[$.

<u>Exercice 5</u> Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = \sin(t)$
On cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t)$.
2. $y'' - y' - 6y = \mathbf{e}^{3t} + \sin(t)$
On applique le principe de superposition et on cherche une solution particulière de
$y'' - y' - 6y = \mathbf{e}^{3t}$ sous la forme $t \mapsto At\mathbf{e}^{3t}$ et pour $y'' - y' - 6y = \sin(t)$ sous la forme
$t \mapsto A\cos(t) + B\sin(t)$.
3. $y'' - 3y' + 4y = 6x^2 + 1$
On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré au plus 2.

Exercice 6 Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathbf{e}^t}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = 1$.
2. $y'' + y' - 2y = 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.
3. $y'' = 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.
4. $y'' + 9y = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.
   On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré au plus 2.

Exercice 7 On cherche à résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation suivante

$$(E)\ :\ t^2y'' + 4ty' - (t^2-2)y = 0$$

1. Pour $t \in]0;+\infty[$, on pose $z(t) = t^2y(t)$.
   Calculer z' et z''.
2. En déduire une équation différentielle linéaire (E') dont z est solution.
3. Résoudre cette équation (E').
4. En déduire les solutions de l'équation initiale (E).