

Prénom :

Nom :

Interrogation n°8 : Applications A

1. Soit $f : E \rightarrow F$. Donner la définition de

1 (a) f est bijective de E dans F .

1 (b) f est surjective de E dans F .

2 Citer le théorème de la bijection.

3 Soit $f : E \rightarrow F$, bijective de E dans F .

1 Donner la définition de la bijection réciproque de f .

1 4. Donner la définition du cardinal d'un ensemble.

5. Soient E et F deux ensembles finis. Rappeler le cardinal de

1 (a) $E \cup F$.

1 (b) $E \times F$

6. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

1 Donner la définition d'une p -liste de E ainsi que le nombre de p -liste de E .

1 7. Soit E un ensemble de cardinal n . Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?

8. Exercices

3 (a) Déterminer $\cos(\mathbb{R})$, $\cos(\{1\})$ et $\cos\left(\left[\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]\right)$.

3 (b) Soit $f : x \in]0 : +\infty[\mapsto x + \frac{1}{x}$.

Proposez des ensembles I et J tels que f soit bijective de I dans J .

(c) On souhaite ranger dans une étagère 3 livres distincts de maths, 4 livres distincts de physique et 2 livres distincts de chimie.

2 i. Combien y a-t-il de rangements possibles?

2 ii. Combien y a-t-il de rangements possibles si on impose que les livres soient rangés par matière?

1) a) $\forall y \in F \exists ! x \in E / y = f(x)$.

b) $\forall y \in F \exists x \in E / y = f(x)$.

2) Si f est strictement monotone et continue sur I alors f est une bijection de I dans $f(I)$.

3) $\forall y \in F \exists ! x \in E / y = f(x)$. $f^{-1} : \left. \begin{array}{l} F \rightarrow E \\ y \mapsto x \text{ tel que } y = f(x) \end{array} \right\}$

4) C'est le nombre d'éléments distincts dans E .

5) a) $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$

b) $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$

6) On appelle p -liste tout élément de E^p . Il y en a $\boxed{n^p}$.

7) $\text{card}(\mathcal{B}(E)) = \boxed{2^n}$

8) (a) $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ $\cos(\{1\}) = \{\cos(1)\}$

$\cos\left(\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]\right) = [-1, 1]$.

(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

x	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
f	$-\infty$	$-\infty$	2	$+\infty$

Par le théorème de la bijection, f est bijective de $]1, +\infty[$ dans $[2, +\infty[$.

(c) i) On effectue des permutations des 9 livres donc il y a $\boxed{9!}$ rangements possibles.

ii) On choisit l'ordre des matières: $3!$ choix.

On choisit l'ordre des livres de maths: $3!$

physique: $4!$

chimie: $2!$

Donc, il y a $\boxed{3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2!}$ rangements par matières.