Exercice 1 Déterminer le terme général des suites suivantes

1. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n$.
2. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$.
3. $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - u_n$.
4. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$.

Correction

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -1 donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times (-1)^n$.
2. (a) Recherche du point fixe

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}.\quad x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -1$$

   (b) Recherche de la raison de la suite auxiliaire
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n - (-1) = u_n + 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2(u_n + 1) = 2w_n$$

   La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $w_o = u_0 + 1 = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = 2^n$$

   (c) Expression du terme général
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = w_n - 1$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n - 1$$

3. (a) Recherche du point fixe

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}.\quad x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

   (b) Recherche de la raison de la suite auxiliaire
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n - \frac{1}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2} = 1 - u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - u_n = -w_n$$

   La suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison -1 et de premier terme $w_o = u_0 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = -\frac{3}{2} \times (-1)^n$$

   (c) Expression du terme général
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = w_n + \frac{1}{2}$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{3}{2} \times (-1)^n + \frac{1}{2}$$

4. On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{2^n}$.
   I Pour $n = 0$, $u_0 = 2^{2^0} = 2^1 = 2$ donc $P(0)$ est vraie.

H Soit $n \geq 0$ tel que $P(n)$ soit vraie.
$u_{n+1} = u_n^2 = (2^{2^n})^2 = 2^{2\times 2^n} = 2^{2^{n+1}}$ donc $P(n+1)$ est vraie.

Exercice 2 Déterminer le terme général des suites suivantes

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{4}{5}u_n - \dfrac{5}{2}u_{n+1}$.

Correction

1. L'équation caractéristique associée à cette suite est $x^2 = 4x - 4$ de discriminant $\Delta = 16 - 16 = 0$. Cette équation admet donc une racine double $x = \dfrac{4}{2} = 2$. On en déduit la forme du terme général de la suite u
$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (A + nB) \times 2^n$$
Les deux premiers termes de la suite imposent les valeurs de A et de B.
$$\begin{cases} u_0 = A = 1 \\ u_1 = (A + B) \times 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$
L'unique suite définie dans l'énoncé a un terme général de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (1 - n)2^n$.
2. L'équation caractéristique associée à cette suite est $x^2 + 2x - 3 = 0$ de discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16 > 0$. Cette équation admet deux racines $x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $x_2 = -3$. On en déduit la forme du terme général de la suite u
$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A + B(-3)^n$$
Les deux premiers termes de la suite imposent les valeurs de A et de B.
$$\begin{cases} u_0 = A + B = 1 \\ u_1 = A - 3B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\dfrac{1}{4} \\ A = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$
L'unique suite définie dans l'énoncé a un terme général de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3 - (-3)^n}{4}$.
3.

Exercice 3 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que
$$u_0 = 1,\ w_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2w_n \text{ et } w_{n+1} = 3w_n + 2u_n$$

1. Calculer u_1, w_1, u_2 et w_2.
2. Montrer que la suite $(u_n - w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
4. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

1. $u_1 = 3u_0 + 2w_0 = 7$, $v_1 = 3w_0 + 2u_0 = 8$, $u_2 = 3u_1 + 2w_1 = 37$ et $w_2 = 3w_1 + 2u_1 = 38$.

2. On dit qu'une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = t_n$. La valeur de la constante est ensuite donnée par la valeur du premier terme.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - w_{n+1} = 3u_n + 2w_n - (3w_n + 2u_n) = u_n - w_n$$

   La suite $(u_n - w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante et vaut $u_0 - w_0 = -1$. En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + 1$$

3. On doit montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence de la forme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + 2w_n = 3u_n + 2(u_n + 1) = 5u_n + 2$$

   La suite u est bien une suite arithmético-géométrique.
4. On va appliquer la méthode qui permet d'obtenir l'expression du terme général à partir de la formule de récurrence.
   (a) Recherche du point fixe

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \quad x = 5x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$$

   (b) Recherche de la raison de la suite auxiliaire
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = u_n - \left(\frac{-1}{2}\right) = u_n + \left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 5u_n + 2 + \frac{1}{2} = 5u_n + \frac{5}{2} = 5\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 5t_n$$

   La suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $t_o = u_0 + \frac{1}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \frac{3}{2} \times 5^n$$

   (c) Expression du terme général
   De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = t_n - \left(\frac{1}{2}\right)$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}$$

   Enfin, $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + 1$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{3}{2} \times 5^n + \frac{1}{2}$$

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geq 0$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe et $u_n \geq 0$.
3. On définit une suite auxiliaire $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
   Montrer que cette suite est géométrique.

4. En déduire le terme de général de la suite t en fonction de n.
5. En déduire celui de la suite u.

Correction

1. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\},\ f'(x) = \frac{2(x+2)-(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geq f(0)$.
Or, $f(0) = \dfrac{1}{2}$ donc on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geq 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: "$u_n \geq 0$".
   I : $u_0 = 2$ donc $P(0)$ est vraie.
   H : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.
   $u_{n+1} = f(u_n)$. Or, $u_n \geq 0$ donc, pas la question 1, $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$.
   Donc, on a bien $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}+1} = \frac{\dfrac{u_n-1}{u_n+2}}{\dfrac{3u_n+3}{u_n+2}} = \frac{u_n-1}{3(u_n+1)} = \frac{1}{3}t_n$$

La suite $(t_n)_{n\geq 0}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

4. Le premier terme est $t_0 = \dfrac{1}{3}$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \dfrac{1}{3^{n+1}}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$t_n = \frac{u_n-1}{u_n+1} \Leftrightarrow t_n(u_n+1) = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{-1-t_n}{t_n-1} = \frac{1+t_n}{1-t_n}$$

donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1+\dfrac{1}{3^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{3^{n+1}}} = \dfrac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}-1}$.

Exercice 5 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{u_n}}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à termes strictement positifs.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n)$. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
3. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire ensuite l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$?
6. Écrire une fonction python `suite(n)` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie le terme u_n. On rappelle que la racine carrée est obtenue par la commande `sqrt`.

7. Écrire une fonction python `somme(n)` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On pourra utiliser la fonction `suite` de la question précédente, ou pas (2 solutions possibles).

Correction

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété de récurrence :

$$\mathcal{P}_n : \text{"}u_n \text{ existe et } u_n > 0\text{"}$$

   • $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 = 1$ (existe et est >0).
   • Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
   Donc $u_n > 0$. Donc $\dfrac{2}{u_n}$ est bien défini et $\dfrac{2}{u_n} > 0$, donc $\sqrt{\dfrac{2}{u_n}}$ est bien défini et $\sqrt{\dfrac{2}{u_n}} > 0$. Or $\sqrt{\dfrac{2}{u_n}} = u_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   • Conclusion : ainsi, d'après le principe de récurrence, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, à termes strictement positifs.
2. On a montré à la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$, donc $\ln(u_n)$ existe.
   $\boxed{\text{Donc la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie}}$.
3. On déduit de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(u_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln(u_n)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}v_n$. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
   • Déterminons $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ell$. On trouve $\ell = \dfrac{1}{3}\ln(2)$.
   • Puis :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} v_{n+1} & = & \frac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}v_n & (1) \\ \dfrac{1}{3}\ln(2) & = & \frac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}\ln(2) & (2) \end{cases}$$
   Donc $((1)-(2))$ $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - \dfrac{1}{3}\ln(2) = -\dfrac{1}{2}(v_n - \dfrac{1}{3}\ln(2))$.
   • Posons $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = v_n - \dfrac{1}{3}\ln(2)$. La relation précédente donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = -\dfrac{1}{2}w_n$, donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n w_0$. Avec $w_0 = v_0 - \dfrac{1}{3}\ln(2)$ et $v_0 = \ln(u_0) = 0$ car $u_0 = 1$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = -\dfrac{1}{3}\ln(2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
   • On en déduit $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = w_n + \dfrac{1}{3}\ln(2) = \dfrac{1}{3}\ln(2) - \dfrac{1}{3}\ln(2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \dfrac{1}{3}\ln(2)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathbf{e}^{v_n} = \exp\left[\dfrac{1}{3}\ln(2)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \exp\left[\dfrac{1}{3}\ln(2)\right]$.

Exercice 6 On considère une suite réelle (u_n) qui vérifie $u_0 = u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$(R):\ \forall n \in ⋗∂≈≂\mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 5u_n$$

1. On note α l'unique réel de l'intervalle $[0, \pi]$ vérifiant $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
   Justifier que $\dfrac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et donner la valeur de $\sin(\alpha)$.
2. Déterminer u_n en fonction de n, de u_0 et de α.
3. Exprimer la somme des n premiers termes de la suite u en fonction de n, de u_0 et de α.

Correction

1. Le réel α est compris entre 0 et π. Donc son sinus est positif. Par ailleurs, on a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$, donc $\sin^2\alpha = \frac{4}{5}$, donc $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ou $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. Ainsi, on peut conclure que $\boxed{\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.}$
   Par ailleurs, la fonction cosinus est négative sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, or $\cos\alpha > 0$. On en déduit que $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (donc $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$) .
   De plus, si $\alpha < \frac{\pi}{3}$, alors, puisque la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$, on aurait $\cos\frac{\pi}{3} \leqslant \cos\alpha$, donc $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$, ce qui n'est pas vrai puisque $0 < \sqrt{4} < \sqrt{5}$ donc $\frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$.
   On en déduit que $\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha$.
   Ainsi, $\boxed{\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}}$.
2. On reconnaît l'expression définissant une suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique $x^2 - 2x + 5 = 0$ a deux solutions complexes conjuguées $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 1 + 2i$
   On a $|z_2| = \sqrt{5}$ et $z_1 = \sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}} + i\frac{2}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}e^{i\alpha}$.
   Il existe donc deux réels A et B tels que pour tout entier naturel n,
   $u_n = \sqrt{5}^n(A\cos(n\alpha) + B\sin(n\alpha))$.
   Déterminons A et B :
   $$\begin{cases} u_0 = A \\ \underbrace{u_1}_{=u_0} = \sqrt{5}(A\underbrace{\cos\alpha}_{\frac{1}{\sqrt{5}}} + B\underbrace{\sin\alpha}_{\frac{2}{\sqrt{5}}}) \end{cases}, \text{ d'où } \begin{cases} A = u_0 \\ B = 0 \end{cases}$$
   Ainsi, $\boxed{\forall n \in ⋗∂≈≂\mathbb{N},\ u_n = u_0\sqrt{5}^n\cos(n\alpha)}$.
3. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = u_0\mathrm{Re}\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} z_2^n\right) = u_0\mathrm{Re}\left(\frac{z_2^n-1}{z_2-1}\right) = \frac{u_0}{2}\mathrm{Im}\left(z_2^n - 1\right)$ soit $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{u_0}{2}(\sqrt{5})^n\sin(n\alpha)}$