Chapitre 13 : Systèmes linéaires

Table des matières

1 Généralités

1.1 Vocabulaire

Définition 1.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, \dots, a_p, b) \in \mathbb{R}^{p+1}$.
On appelle équation linéaire à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$$

Les variables $(x_1, \dots, x_p)$ sont les inconnues de l'équation.

Exemple 2

1. Une droite est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ solution d'une équation de la forme $ax + by + c = 0$. Il s'agit d'une équation linéaire à 2 inconnues.
2. Un plan est l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ solutions d'une équation $ax + by + cz + d = 0$. C'est une équation linéaire à 3 inconnues.

Définition 3.

Soient $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle système linéaire de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$ un ensemble de n équations linéaires ayant les mêmes p inconnues $(x_1, \dots, x_p)$.

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \quad (L_1) \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ip}x_p = b_i \quad (L_i) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \quad (L_n) \end{cases}$$

On parlera aussi de système de taille $n \times p$.

Lorsque le second membre $(b_i)_{1 \le i \le n}$ est nul, on parle de système homogène.

Exemple 4 Le système $\Sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 20 \end{cases}$ est de taille 3×4.

Définition 5.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Résoudre un système linéaire, c'est trouver tous les $p-$uplets $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$ qui vérifient ce système.

- Un système est dit compatible lorsqu'il admet des solutions.
- Un système est dit incompatible lorsque qu'il n'admet aucune solution.
- Un système est dit de Cramer lorsqu'il admet une unique solution.

Remarque 6 Un système homogène est compatible.

Exemple 7 Soit le système suivant : $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ 5x + 3y - z = 0 \end{cases}$ Ici, $n = \dots$ et $p = \dots$

Résoudre ce système revient à rechercher le point d'intersection de 2 plans.
L'existence des solutions est liée à la position relative de ces plans.

Exemple 8 Prenons le cas où $n = 3$ est quelconque et $p = 2$: $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y = b_3 \end{cases}$

1.2 Méthode par substitution

On l'utilise lorsque le système est de *petite taille*.

Methode 1 (Résolution par substitution)**.**

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit Σ un système linéaire de taille $n \times p$.

1. On utilise une des équations pour exprimer une des inconnues en fonction des autres.
2. On remplace cette inconnue dans les $n - 1$ équation suivantes.
   On a alors un systèmes de taille $(n - 1) \times (p - 1)$.
3. On réitère le processus. A la fin,
   (a) Soit il y a une inconnue et plusieurs équations.
   Si les équations sont indépendantes, alors il n'y a pas de solution.
   (b) Soit il y a une équation.
   Certaines inconnues sont donc des paramètres et on exprime toutes les autres en fonction de celles-ci.

Exemple 9 Résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$.

2 Systèmes échelonnés équivalents

2.1 Opérations élémentaires et systèmes équivalents

Définition 10.

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit Σ un système linéaire de taille $n \times p$.
On appelle $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de ce système.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. soit $\lambda \in \mathbb{R}^2$.

On appelle opérations élémentaires sur les lignes de Σ les trois opérations suivantes :

1. **Echange de deux lignes :** $L_i \longleftrightarrow L_j$
   La ligne L_i est échangée avec la ligne L_j.
2. **Multiplication d'une ligne par un scalaire :** $L_i \longleftarrow \lambda L_i$
   La ligne L_i est multipliée par une constante non nulle λ.
3. **Combinaison linéaire de deux lignes :** $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$**.**
   On ajoute à la ligne L_i la ligne L_j multipliée par λ.

Définition 11.

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soient Σ et Σ' deux systèmes de taille $n \times p$.
On dit que ces systèmes sont des systèmes équivalents lorsqu'une suite finie d'opérations élémentaires permet de passer de Σ à Σ'.

Théorème 12.

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Remarque 13 Pour résoudre un système, on cherchera donc un système qui lui est équivalent et qui est facile à résoudre.

Exemple 14 On utilise l'opération 3 puis l'opération 2 pour résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x - y = -2 \\ 5y = 5 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x - y = -2 \\ y = 1 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}(L_1 + L_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \dfrac{-1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Methode 2 (Résolution par opérations élémentaires)**.**

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit Σ un système de taille $n \times p$.

1. On effectue des opérations élémentaires sur le système Σ jusqu'à obtenir un système équivalent plus simple.
2. On résout ce système équivalent.
3. On en déduit les solutions de Σ.

2.2 Systèmes échelonnées

Définition 15.

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On dit qu'un système de taille $n \times p$ est échelonné par ligne lorsque :

1. Si une ligne a un membre de gauche nul alors toutes les lignes suivantes aussi.
2. Sinon, l'indice de l'inconnue portant le premier coefficient non nul à partir de la gauche croit strictement.

Le système a une structure « triangulaire ».

$$\left\{ \begin{array}{llll} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & a_{1,3}x_3 & = b_1 \\ & a_{2,2}x_2 & +a_{2,3}x_3 & = b_2 \\ & & a_{3,3}x_3 & = b_3 \end{array} \right.$$

Exemple 16 Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x + 5y - z = 4 \\ y + z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

Définition 17.

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit Σ un système linéaire de taille $n \times p$ **échelonné**.

1. On appelle pivot le premier coefficient non nul dans chaque ligne.
2. Les inconnues associées à ces pivots sont les inconnues principales.
3. Les autres inconnues sont les inconnues secondaires.
4. Le nombre de pivot est le rang du système.

Remarque 18 Lors de la résolution du système, on exprimera les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.

Exemple 19 Résoudre le système suivant $\left\{ \begin{array}{l} 3x+5y-z=4 \\ z=1 \end{array} \right.$,

1. Les pivots sont 3 et 1.
2. Les inconnues principales sont x et z.
3. La seule inconnue secondaire est y.

2.3 Méthode du pivot de Gauss : système échelonné équivalent

- **Objectif :** Déterminer, par une suite d'opérations élémentaires, un système échelonné équivalent au système à résoudre.
- **Principe :** Soit le système Σ : $\left\{ \begin{array}{rrrrcr} & -y & & +2t & = & 1 \\ 2x & +3y & -z & -3t & = & 3 \\ 4x & +4y & -z & +3t & = & -4 \end{array} \right.$.

  (a) On choisit un coefficient non nul dans la première colonne, appelé **pivot** : le 2 en position (2,1).

  (b) Par un échange de ligne, on place ce pivot en position (1,1) dans le système.

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} & -y & & +2t & = & 1 \\ 2x & +3y & -z & -3t & = & 3 \\ 4x & +4y & -z & +3t & = & -4 \end{array} \right. \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrrrcr} 2x & +3y & -z & -3t & = & 3 \\ & -y & & +2t & = & 1 \\ 4x & +4y & -z & +3t & = & -4 \end{array} \right.$$

  (c) A l'aide d'opérations $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$, on met des 0 sous le pivot dans la première colonne.

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 2x & +3y & -z & -3t & = & 3 \\ & -y & & +2t & = & 1 \\ 4x & +4y & -z & +3t & = & -4 \end{array} \right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrrrcr} 2x & +3y & -z & -3t & = & 3 \\ & -y & & +2t & = & 1 \\ & -2y & +z & -3t & = & -10 \end{array} \right.$$

  (d) On applique de nouveau les étapes précédentes pour le sous-système obtenu en oubliant la ligne 1 et la colonne 1.

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 2x & +3y & -z & -3t & = & 3 \\ & -y & & +2t & = & 1 \\ & -2y & +z & -3t & = & -10 \end{array} \right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rrrrcr} 2x & +3y & -z & -3t & = & 3 \\ & -y & & +2t & = & 1 \\ & & +z & -7t & = & -12 \end{array} \right.$$

  (e) On exprime les inconnues principales en fonctions des inconnues secondaires.
  Ici, le rang vaut 3 et t est une inconnue secondaire.

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 2x & +3y & -z & -3t & = & 3 \\ & -y & & +2t & = & 1 \\ & & +z & -7t & = & -12 \end{array} \right. \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_3}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{3+3t+z-3y}{2} = 2t-3 \\ y & = & 2t-1 \\ z & = & 7t-12 \end{array} \right.$$

  (f) On peut ensuite résoudre le système

$$S = \{(2t-3, 2t-1, 7t-12, t)\ ,\ t \in \mathbb{R}\}$$

2.4 Ensemble des solutions d'un système linéaire

Définition 20.

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit Σ un système linéaire de taille $n \times p$.
On appelle rang du système le rang de tout système échelonné équivalent à Σ.

Théorème 21.

Un système linéaire a zéro, une seule ou une infinité de solutions.