Chapitre 14 : Matrices

Table des matières

1 Ensembles des matrices et opérations

1.1 Définitions et notations

Définition 1.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
On appelle matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ un tableau à n lignes et p colonnes formé d'éléments de $\mathbb{R}$.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & & & \vdots & \\ m_{i1} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & \\ m_{n1} & \dots & m_{nj} & \dots & m_{np} \end{pmatrix}$$

On note également $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

Définition 3.

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
On note $0_{n,p}$ la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 4.

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Si $p = 1$, on dit que A est une matrice colonne.
$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$
2. Si $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne.
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_i & \dots & a_p \end{pmatrix}$$

1.2 Matrices carrées

Définition 5.

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Lorsque $n = p$, on dit que A est une <u>matrice carré</u>.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On note $\underline{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Définition 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est une <u>matrice diagonale</u> lorsque ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j \neq i \Rightarrow a_{ij} = 0$$

<u>**Exemple 7**</u> La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

<u>**Exemple 8**</u> Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est **la matrice identité de taille** n.

Définition 9.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On dit que A est une matrice triangulaire supérieure lorsque ses coefficients en dessous de la diagonale sont nuls.
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{in} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j < i \Rightarrow a_{ij} = 0$$

2. On dit que A est une matrice triangulaire inférieure lorsque ses coefficients au dessus de la diagonale sont nuls.
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j > i \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Exemple 10 La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est aussi triangulaire supérieure.

1.3 Addition de matrices et multiplication par un scalaire

Définition 11.

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle somme de A et de B la matrice notée $A + B$ et définie par
$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1j} + b_{1j} & \dots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1} + b_{i1} & \dots & a_{ij} + b_{ij} & \dots & a_{ip} + b_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nj} + b_{nj} & \dots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple 12 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Théorème 13.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ non nuls.

1. $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2,\ A + B = B + A$.
2. $\forall (A,B,C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^3,\ (A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$

Définition 14.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ non nuls.
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On appelle <u>multiplication de A par λ</u> la matrice notée λA et définie par

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & ... & \lambda a_{1j} & ... & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots & \\ \lambda a_{i1} & ... & \lambda a_{ij} & ... & \lambda a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & \\ \lambda a_{n1} & ... & \lambda a_{nj} & ... & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

Exemple 15 $3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 15 \end{pmatrix}$

Théorème 16.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A.$
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$
3. $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B.$

1.4 Produit matriciel

Définition 17.

Soient n, p et q trois entiers naturels non nuls.
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

On appelle <u>produit de A par B</u> la matrice notée $A \times B$, ou AB, définie par

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ b_{i1} & \dots & \dots & b_{ij} & \dots & b_{iq} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ b_{p1} & \dots & \dots & b_{pj} & \dots & b_{nq} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots & \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} & \dots \\ \dots & \dots & \sum_{k=1}^{p} a_{nk}b_{kq} \end{pmatrix} \end{array}$$

La définition de AB est donc

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}$$

Exemple 18 On souhaite calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Le produit est une matrice de taille 2×2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[\text{avec chaque colonne}]{\text{On multiplie chaque ligne}} \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1+3+10 & 2+4+12 \\ 2+6+15 & 4+8+18 \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 18 \\ 23 & 30 \end{pmatrix}$

Remarque 19 Le produit $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -8 \end{pmatrix}$ n'est pas défini car le nombre de colonnes de la première matrice est différent du nombre de ligne de la deuxième.

Théorème 20.

Soit $(n, p, q, r) \in \mathbb{N}^4$ tous non nuls.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda AB.$
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ \forall D \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}),\ A \times (BD) = (AB) \times D.$
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2,\ \forall D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ (A + B) \times D = AD + BD.$
4. $\forall D \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R}),\ \forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2,\ D \times (A + B) = DA + DB.$

Remarque 21 La multiplication matricielle n'est pas commutative.
Même lorsque les produits $A \times B$ et $B \times A$ sont bien définis, ils ne sont pas de la même taille ou ils ne sont pas toujours égaux.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}$ alors que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 17 & 24 \end{pmatrix}$.

Exemple 22 Calculer $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que remarquez-vous ?

1.5 Ecriture matricielle d'un système

Exemple 23 Soit le système $\Sigma : \begin{cases} 3x + 7y = 2 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 7y = 2 \\ 2x + y = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow AX = B \end{aligned}$$

Définition 24.

Soient $(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit le système

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \quad (L_1) \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \quad (L_i) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \quad (L_n) \end{cases}$$

On appelle <u>matrice associée</u> à ce système la matrice dont les coefficients sont ceux du système

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

En notant $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la matrice inconnue, le système Σ s'écrit $AX = B$.

Définition 25.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ non nuls. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On peut lui associer le système $AX = 0$.

On appelle <u>rang de A</u> le rang du système associé à A.

1.6 Puissances de matrices carrées

Théorème 26.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Le produit de deux matrices carrées de taille n est une matrice carrée de taille n.
2. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AI_n = I_nA = A$.

Théorème 27.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Alors, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n^k \end{pmatrix}$$

Définition 28.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
On dit que <u>A et B commutent</u> lorsque $AB = BA$.

Théorème 29 (Binôme de Newton)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = BA$.

1. $\forall k \in \mathbb{N},\ (AB)^k = A^k B^k$.
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ (A+B)^k = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} A^\ell B^{k-\ell}$.

<u>**Exemple 30**</u> Calculer les différentes puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.7 Transposition d'une matrice

Définition 31.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ non nuls.
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
On appelle <u>transposée de la matrice A</u> la matrice notée A^T (ou ${}^tA$) et définie par

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{j1} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{1i} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{ni} \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{1p} & \dots & a_{jp} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$

Les lignes de A deviennent les colonnes de A^T et les colonnes de A deviennent les lignes de A^T.

Exemple 32 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Théorème 33.

Soit $(n, p, q) \in \mathbb{N}^2$ non nuls.

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ (A^T)^T = A$.
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$.
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}),\ (AB)^T = B^T A^T$.

Définition 34.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est une matrice symétrique lorsque $A^T = A$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques

Exemple 35

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique.
2. La somme de deux matrices symétriques est une matrice symétrique.
3. Le produit de deux symétriques qui commute est une matrice symétrique.

2 Matrices carrées inversibles

2.1 Définitions et propriétés

Définition 36.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ lorsqu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

B est l'inverse de A. On la note A^{-1}.

Exemple 37

1. La matrice identité I_n est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $I_n^{-1} = I_n$.
2. La matrice nulle 0_n n'est pas inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible.

Théorème 38.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ inversibles.

1. A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
3. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Remarque 39 La somme de deux matrices inversibles n'est pas toujours une matrice inversible.

2.2 Inversibilité d'une matrice carrée de taille 2

Théorème 40.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
La matrice A est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.
Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple 41 Pour θ un réel, la matrice $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est-elle inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Si oui, quel est son inverse ?

2.3 Recherche de l'inverse d'une matrice carrée par la méthode du pivot

Pour calculer l'inverse d'une matrice inversible, on écrit cette matrice à côté de la matrice identité.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis, on applique des opérations sur les lignes de A pour obtenir à gauche la matrice I_3.

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{5}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{5}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$A \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Donc, $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4 Résolution de systèmes

Théorème 42.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Si la matrice A est inversible alors le système $AX = B$ admet une unique solution $X = A^{-1}B$.
Le système est donc de Cramer.

Exemple 43 Résoudre, en utilisant les matrices, le système $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

Exemple 44 Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le système système $\begin{cases} x + z = a \\ -x + z = b \\ y - z = c \end{cases}$

Théorème 45.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si, pour toute matrice colonne $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ admet une unique solution alors la matrice A est inversible et on peut déterminer A^{-1} en résolvant le système.

Exemple 46 Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.