BCPST
1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°3

Samedi 18 novembre 2023

– Complexes, fonctions, applications –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Il est indispensable de toujours préciser quelle question ou sous-question vous êtes en train de traiter.

Les résultats essentiels, ainsi que les conclusions des questions, devront être soulignés ou encadrés. N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 - Calculs.

1. Déterminer les limites suivantes.
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\mathbf{e}^{x} - x^2 + 3\right)$.
2. Donner l'écriture trigonométrique des complexes suivants.
   (a) $z = 2 - 2\mathbf{i}$.
   (b) $z = \left(\dfrac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right)^5$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^2(x)\sin^2(x)$.

Exercice 2 - Fonction tangente hyperbolique.

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th, par $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathbf{e}^{x} - \mathbf{e}^{-x}}{\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{-x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de th. On le notera I.
2. Étudier la parité de la fonction th. Qu'en déduit-on sur la courbe représentative de th ?
3. Justifier que th est dérivable sur I et montrer que
$$\forall x \in \mathrm{I},\ \mathrm{th}'(x) = \frac{4}{(\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{-x})^2}$$
4. Déterminer les limites de th aux bornes de I. Précisez les asymptotes éventuelles.
5. Dresser le tableau de variations de th sur I.
   La fonction est-elle bornée sur I ?
6. Déterminer l'ensemble th(I).
7. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de th au point d'abscisse $x = 0$.
8. Tracer l'allure de la courbe représentative de th.
9. Justifier que la fonction th réalise une bijection de l'intervalle I dans un intervalle J à préciser.
10. Déterminer une expression de l'application réciproque de cette bijection.

Exercice 3 - Informatique.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + u_n^2$.

1. Écrire une fonction python `suite` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie le terme u_n.
2. Écrire une fonction python `somme` qui prend en argument d'entrée un entier naturel n et qui renvoie la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. On pourra utiliser la fonction `suite` de la question précédente, ou pas (2 solutions possibles).

Exercice 4 - Applications.

Soient E, F, G trois ensembles et soient des applications $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$.

1. Justifier que l'application $g \circ f$ est bien définie.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.
3. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Problème - Complexes

L'objectif est de résoudre l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$(\mathrm{E}) : \; (z+i)^5 = (z-i)^5$$

1. **Equation intermédiaire.** On cherche à résoudre $\mathrm{Z}^5 = 1$.
   (a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. En écrivant $z = |z|\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, montrer que
   $$z^5 = 1 \iff \text{il existe } k \in [\![0,4]\!] \text{ tel que } z = \mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}.$$
2. **Résolution de** (E)**.**
   (a) Montrer que i n'est pas solution de (E).
   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que
   $$(z+i)^5 = (z-i)^5 \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1.$$
   (c) Soit $z \in \mathbb{C}$. Déduire des questions précédentes que :
   $$z \text{ est solution de (E)} \iff \text{il existe } k \in [\![0,4]\!] \text{ tel que } \frac{z+i}{z-i} = \mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}.$$
   (d) Montrer que si $k = 0$, l'équation $\frac{z+i}{z-i} = \mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}$ n'a pas de solution.
   (e) Soit $k \in [\![1,4]\!]$ fixé. Simplifier $\dfrac{1+\mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}}{1-\mathbf{e}^{\frac{2ik\pi}{5}}}$.
   (On pourra utiliser l'angle moitié).
   (f) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est :
   $$\mathrm{S} = \left\{ \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}, \; k \in [\![1,4]\!] \right\}.$$