Corrigé du devoir surveillé n° 3

— 18 novembre 2023—

Exercice 1 - Calculs.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Donc, $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\sin(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.

   Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Par le théorème d'encadrement, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0}$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x\mathbf{e}^x - x^2 + 3 = x\mathbf{e}^x\left(1 - \dfrac{x}{\mathbf{e}^x} + \dfrac{3}{x\mathbf{e}^x}\right)$.

   Or, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathbf{e}^x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathbf{e}^x = +\infty$.

   Donc, par quotient, somme puis produit, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x\mathbf{e}^x - x^2 + 3\right) = +\infty}$.

2. (a) $|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ donc $z = 2 - 2\mathbf{i} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donc, $\boxed{z = 2\sqrt{2}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}}$.

   (b) $\dfrac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = \dfrac{\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{-\mathbf{i}\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{i}\pi}{4}}} = \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{i}\pi}{2}}$. Donc, $\boxed{z = \mathbf{e}^{-\frac{5\mathbf{i}\pi}{2}}}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sin^2(x)\cos^2(x) &= \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} - \mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}}{2\mathbf{i}}\right)^2 \left(\frac{\mathbf{e}^{\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{-\mathbf{i}x}}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x} - 2\mathbf{e}^{\mathbf{i}x}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{-2\mathbf{i}x}}{-4}\right)\left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x} + 2\mathbf{e}^{\mathbf{i}x}\mathbf{e}^{-\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{-2\mathbf{i}x}}{4}\right) \\
&= \left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x} - 2 + \mathbf{e}^{-2\mathbf{i}x}}{-4}\right)\left(\frac{\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x} + 2 + \mathbf{e}^{-2\mathbf{i}x}}{4}\right) \\
&= \frac{\mathbf{e}^{4\mathbf{i}x} + 2\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{2\mathbf{i}x}\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}x} - 2\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x} - 4 - 2\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{-2\mathbf{i}x}\mathbf{e}^{2\mathbf{i}x} + 2\mathbf{e}^{-2\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{-4\mathbf{i}x}}{-16} \\
&= \frac{\mathbf{e}^{4\mathbf{i}x} + \mathbf{e}^{-4\mathbf{i}x} - 2}{-16} = \frac{1 - \cos(4x)}{8}
\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\sin^2(x)\cos^2(x) = \dfrac{1-\cos(4x)}{8}}$.

Exercice 2 - Fonction tangente hyperbolique.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$ donc $e^x + e^{-x} > 0$. $\boxed{\text{Donc th est définie sur } \mathbb{R}}$.

2. th est définie sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(-x) = \dfrac{\mathbf{e}^{-x} - \mathbf{e}^{-(-x)}}{\mathbf{e}^{-x} + \mathbf{e}^{-(-x)}} = \dfrac{\mathbf{e}^{-x} - \mathbf{e}^{x}}{\mathbf{e}^{-x} + \mathbf{e}^{x}} = \dfrac{-(\mathbf{e}^{x} - \mathbf{e}^{-x})}{\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{-x}} = -\mathrm{th}(x)$.
   $\boxed{\text{Donc th est impaire}}$. On en déduit que sa courbe représentative admet le point O (origine du repère) pour centre de symétrie.

3. th est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas, donc th est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\quad \mathrm{th}'(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\
&= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = \dfrac{4}{(\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x})^2}}$.

4. Limite en $+\infty$:
$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \dfrac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ donc par somme et quotient des limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}(x) = 1}$.
$\boxed{\text{On en déduit que la droite d'équation } y = 1 \text{ est asymptote horizontale à la courbe en } +\infty}$.
Limite en $-\infty$:
Puisque la fonction th est impaire, on déduit de la limite précédente que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}(x) = -1}$
et que $\boxed{\text{la droite d'équation } y = -1 \text{ est asymptote horizontale à la courbe en } -\infty}$.

5. Nous avons calculé la dérivée de th à la question 3. D'après l'expression obtenue, $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) > 0$ donc la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On résume les résultats obtenus dans le tableau de variations suivant :

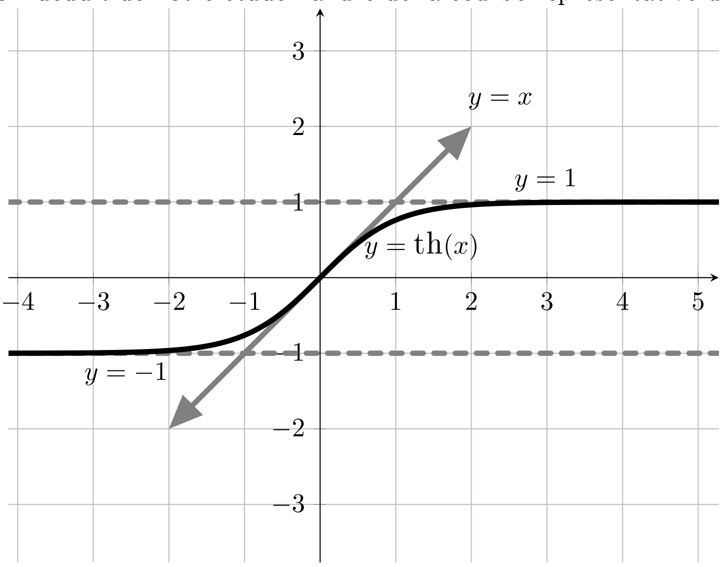
x	$-\infty$		$+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$		$+$	
th	-1	$\nearrow$	1

On constate d'après ce tableau de variations que $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < \mathrm{th}(x) < 1$, donc $\boxed{\text{th est bornée}}$.

6. D'après le tableau de variations précédent, $\boxed{\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1, 1[}$.

7. Puisque th est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative admet une tangente en tout point. En particulier, la tangente au point d'abscisse $x = 0$ a pour équation $y = \mathrm{th}(0) + th'(0)x$. Puisque $\mathrm{th}(0) = 0$ et $\mathrm{th}'(0) = \dfrac{4}{(e^0+e^0)^2} = 1$, on en déduit l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$: $\boxed{y = x}$.

8. On déduit de notre étude l'allure de la courbe représentative de th :



9. D'après notre étude, la fonction th est **continue** (car dérivable), **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1, 1[$.
On pose $I = \mathbb{R}$, $J =]-1, 1[$.

10. Soit $y_0 \in]-1, 1[$ fixé quelconque.
Résolvons l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(x) = y_0 &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y_0 \\
&\iff e^x - e^{-x} = y_0(e^x + e^{-x}) \text{ car } e^x + e^{-x} > 0 \\
&\iff (1-y_0)e^x = (1+y_0)e^{-x} \\
&\iff (1-y_0)e^{2x} = (1+y_0) \text{ (on a multiplié par } e^x > 0) \\
&\iff e^{2x} = \frac{1+y_0}{1-y_0} (*) \text{ car } 1 - y_0 \neq 0
\end{aligned}$$

Or $y_0 \in]-1,1[$ donc $1+y_0>0$ et $1-y_0>0$, donc $\dfrac{1+y_0}{1-y_0}>0$. On peut donc appliquer la fonction logarithme (l'équation obtenue est équivalente à l'équation (*) car pour revenir en arrière, on applique la fonction exponentielle)). D'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(x) = y_0 &\iff 2x = \ln\left(\frac{1+y_0}{1-y_0}\right) \\ &\iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y_0}{1-y_0}\right) \end{aligned}$$

Donc l'unique antécédent de y_0 par th est $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y_0}{1-y_0}\right)$. On en déduit l'application réciproque de th :

$$\boxed{\begin{array}{lcl}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) \end{array}}$$

Exercice 3 - Informatique.

1.

```python
def suite(n):
    u = 1 # c'est u_0
    for i in range(n):
        u = u**2+1
    return u
```

2. Deux solutions possibles :
La première est la moins coûteuse en opérations. On fait la somme au fur et à mesure que l'on calcule les termes successifs de la suite. On obtient cette fonction en modifiant légèrement la fonction suite de la question précédente (on rajoute le calcul de la variable s) :

```python
def somme(n):
    u = 1 # c'est u_0
    s = u # somme du premier terme uniquement
    for i in range(n):
        u = u**2+1
        s = s + u
    return s
```

La deuxième fonction proposée dans ce corrigé utilise la fonction suite de la question précédente. Elle est beaucoup plus coûteuse en opérations que la première car pour chaque calcul des u_k, on recalcule tous les termes de la suite entre u_0 et u_k.

```python
def somme(n):
    s = 0
    for i in range(n+1):
        u = suite(i) # On utilise la fonction de la question precedente
        s = s + u
    return s
```

Exercice 4 - Applications.

Soient E, F, G trois ensembles et soient des applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. L'ensemble d'arrivée de f est l'ensemble de départ de g, donc $\boxed{\text{l'application } g\circ f \text{ est bien définie}}$.

2. On suppose que $g \circ f$ est injective et que f est surjective.
Montrons que g est injective (c'est à dire que $\forall (x,x') \in F^2,\ g(x) = g(x') \Longrightarrow x = x'$).
Soient $(x,x') \in F^2$ fixés quelconques tels que $g(x) = g(x')$ (*).
$x \in F$ et $f : E \to F$ est surjective, donc il existe $t \in E$ tel que $f(t) = x$.
De même, $x' \in F$ et $f : E \to F$ est surjective, donc il existe $t' \in E$ tel que $f(t') = x'$.
À partir de l'égalité (*), on obtient donc $g(f(t)) = g(f(t'))$, c'est à dire $g \circ f(t) = g \circ f(t')$. Or $g \circ f$ est injective.
On en déduit $t = t'$. D'où $f(t) = f(t')$, c'est à dire $x = x'$.
$\boxed{\text{On en déduit que } g \text{ est injective}}$.

3. On suppose que $g \circ f$ est surjective et que g est injective.
Montrons que f est surjective (c'est à dire : $\forall y \in F,\ \exists x \in E : f(x) = y$).
Soit $y \in F$ fixé quelconque. On peut lui appliquer $g : F \to G$ (car $y \in F$, ensemble de départ de g).
Donc $g(y) \in G$, et G est ensemble d'arrivée de $g \circ f$. Or $g \circ f : E \to G$ est surjective. Donc il existe $x \in E$ tel que $g(y) = g \circ f(x)$. Ainsi, $g(y) = g(f(x))$. Or g est injective, donc on en déduit $y = f(x)$.
$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est surjective}}$.

Problème - Complexes

1. Remarquons que $z = 0$ n'est pas solution. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ fixé quelconque. Il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = |z|\mathbf{e}^{\mathbf{e}\theta}$.

$$\begin{aligned}
z^5 = 1 &\iff (|z|e^{i\theta})^5 = 1,\\
&\iff |z|^5 e^{5i\theta} = 1\mathbf{e}^{0\mathbf{i}},\\
&\iff \begin{cases} |z|^5 = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 5\theta = 2k\pi \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} |z| = 1 (\text{car } |z| \in \mathbb{R}_+) \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 5\theta = 2k\pi, \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{2k\pi}{5}, k \in [\![0, 4]\!] \text{ car } \theta \in [0, 2\pi[. \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc : $\boxed{\left\{\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}} \mid k \in [\![0, 4]\!]\right\}.}$

2. **Résolution de** (E)**.**

(a) $(\mathbf{i} + \mathbf{i})^5 = (2\mathbf{i})^5 \neq 0$ et $(\mathbf{i} - \mathbf{i})^5 = 0^5 = 0$. Ainsi, $\boxed{\mathbf{i} \text{ n'est pas solution de } (E)}$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Puisque i n'est pas racine de (E), on peut supposer $z \neq i$. Ainsi, $\boxed{(z - i)^5 \neq 0}$. Donc en divisant l'équation (E) par $(z - i)^5$, on obtient une équation équivalente à (E). Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(z + i)^5 = (z - i)^5 \iff \left(\frac{z + i}{z - i}\right)^5 = 1.$$

(c) Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la question 1,

$$\begin{aligned}
(z + \mathbf{i})^5 = (z - \mathbf{i})^5 \quad &\iff \quad \left(\frac{z + \mathbf{i}}{z - \mathbf{i}}\right)^5 = 1,\\
&\iff \quad \exists k \in [\![0, 4]\!] : \frac{z + \mathbf{i}}{z - \mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{z \text{ est solution de } (E) \iff \text{il existe } k \in [\![0, 4]\!] \text{ tel que } \frac{z + \mathbf{i}}{z - \mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}.}$$

(d) Posons $k = 0$. L'équation précédente devient : $\dfrac{z + \mathbf{i}}{z - \mathbf{i}} = 1$. Puisque $z \neq i$, elle est équivalente à $z + \mathbf{i} = z - \mathbf{i}$, ou encore $\mathbf{i} = -\mathbf{i}$, qui n'est vérifié pour aucune valeur de z complexe. Ainsi, $\boxed{\text{Pour } k = 0, \text{ l'équation n'a pas de solution.}}$

(e) Soit $k \in [\![1, 4]\!]$ fixé. Posons $\theta = \dfrac{2k\pi}{5}$. Avec la méthode de factorisation par l'angle moitié, on trouve alors avec les formules d'Euler

$$\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2\mathbf{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \mathbf{i}\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

.

Donc, $\boxed{\dfrac{1 + \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}}{1 - \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}} = \mathbf{i}\dfrac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)}}$.

(f) Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé.

$$
\begin{aligned}
(z+\mathbf{i})^5 = (z-\mathbf{i})^5 \quad & \Longleftrightarrow \quad \exists k \in [\![0,4]\!] / \frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists k \in [\![1,4]\!] / \frac{z+\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} = \mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists k \in [\![1,4]\!] / z+\mathbf{i} = (z-\mathbf{i})\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists k \in [\![1,4]\!] / (1-\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}})z = -\mathbf{i}(1+\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}}) \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists k \in [\![1,4]\!] / z = -\mathbf{i}\frac{(1+\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}})}{(1-\mathbf{e}^{\frac{2\mathbf{i}k\pi}{5}})} \\
& \Longleftrightarrow \quad \exists k \in [\![1,4]\!] / z = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} \qquad .
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$
\boxed{\left\{\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)},\ k \in [\![1,4]\!]\right\}.}
$$