Exercice 1 On définit les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Parmi les matrices, lesquelles peut-on multiplier ? Donner la taille des produits puis les calculer.
2. Donner leur transposée.

Exercice 2 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $A(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $A(x)A(y)$.
2. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Déterminer $(A(x))^n$.

Exercice 3 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A - 3I_n = 0$.
   Déterminer A^3 et A^4.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Montrer que $(I_4 - A)(I_4 + A + A^2 + A^3) = I_4 - A^4$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$.
   (a) Quelle est la taille des matrices A^T, A^TA et AA^T ?
   (b) Quels sont les coefficients sur la diagonale de AA^T ?
   (c) Dire si A^TA et AA^T sont antisymétriques ou symétriques.

Exercice 5 Calculer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 *Avec un polynôme annulateur*

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 - 3A + 3I_3 = 0_3$. En déduire que A est inversible et la valeur de son inverse.
2. Posons $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $B^3 - 3B^2 + B - 5I_3 = 0_3$. En déduire que B est inversible et la valeur de son inverse.

Exercice 7 Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & 11 & -2 \end{pmatrix}$.

1. On veut résoudre l'équation $AX = B$ d'inconnues X. Quelle est la taille de la matrice X ? Déterminer les solutions X.
2. On veut résoudre l'équation $YA = B$ d'inconnues Y. Quelle est la taille de la matrice Y ? Déterminer les solutions Y.

Exercice 8 Résoudre les systèmes suivants :

$$1) \left\{ \begin{array}{r} x + 3y - z = -1 \\ 2x + 5y + z = 0 \\ 3x + 2z = 3 \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{r} -y - z = 1 \\ 4x + 3y + 11z = -2 \\ 2x - y + 4z = 1 \end{array} \right.$$

Exercice 9 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par

$$u_0 = 1,\ v_0 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$$

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Proposer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de A, de n et de X_0.
3. On pose $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances successives de N.
4. En déduire les puissances successives de A.
5. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

Exercice 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$, puis déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Exprimer A en fonction de D, P, P^{-1}, puis A^n en fonction de D, P, P^{-1} et n.
4. En déduire une expression de A^n en fonction de n.
5. On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par la donnée de leurs premiers termes, respectivement x_0, y_0 et z_0, et de la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = 2x_n - z_n \\ y_{n+1} = -4x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{array} \right. \quad \text{et on pose :} \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre X_{n+1}, X_n et A.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de A, n et X_0.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.