

Prénom :

Nom :

Interrogation n°9 : Suites usuelles A

1. Donner le terme général d'une suite géométrique de raison 5 et de premier terme -1 .

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme 1 .

(a) Déterminer u_{2022} .

(b) Calculer $\sum_{k=2}^{2022} u_k$.

3. Exercices

(a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - 2u_n$.

Déterminer l'expression du terme général.

(b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

Déterminer l'expression du terme général.

(c) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n}{3 + 2u_n}$.

Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -5^n$

2) (a) $u_{2022} = 1 - 2022 \times 2 = -4043$

(b) $\sum_{k=2}^{2022} u_k = \sum_{k=2}^{2022} (1 - k \times 2) = 2021 - 2 \sum_{k=2}^{2022} k$

$$= 2021 - 2 \left(\frac{2022 \times 2023}{2} - 1 \right)$$

$$= 2021 - 2022 \times 2023 + 2$$

$$= -2023 \times 2021$$

3) (a) C'est une suite arithmético-géométrique.
On cherche le point fixe: $l = 1 - 2l \Leftrightarrow l = \frac{1}{3}$.

Soit (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \frac{1}{3}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - 2u_n = -2 \left(u_n - \frac{1}{3} \right) = -2v_n$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 (-2)^n = \frac{5}{3} (-2)^n$$

$$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + \frac{1}{3} = \frac{5 \times (-2)^n + 1}{3}$$

(b) C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Soit l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0.$$

Il y a 2 racines complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \text{ et } z_2 = 1-i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\sqrt{2})^n \left[A \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + B \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right]$$

on détermine A et B.

$$u_0 = 2 \text{ et } u_0 = A.$$

$$u_1 = 0 \text{ et } u_1 = \sqrt{2} \left(A \frac{\sqrt{2}}{2} + B \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = A + B.$$

$$\text{donc } A = u_0 = 2 \text{ et } B = -A = -u_0 = -2.$$

$$\text{donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right]}.$$

(c) On raisonne par récurrence avec.

$\forall n \in \mathbb{N}, P(n): "u_n \text{ existe et } u_n > 0"$

(I) Pour $n=0$.

u_0 existe et $u_0 = 3 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$u_n > 0$ donc $3 + 2u_n > 0$ donc $\frac{3u_n}{3+2u_n}$ existe.

De plus, $3u_n > 0$ et $3 + 2u_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

(c) Par le principe de récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n > 0$.

Prénom :

Nom :

Interrogation n°9 : Suites usuelles B

1. Donner le terme général d'une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme -1 .

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison -2 et de premier terme 1.

(a) Déterminer u_{2022} .

(b) Calculer $\sum_{k=2}^{2022} u_k$.

3. Exercices

(a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1$.

Déterminer l'expression du terme général.

(b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_n - 2u_{n+1}$.

Déterminer l'expression du terme général.

(c) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{3u_n}$.

Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -1 + 5n$

2) a) $u_{2022} = (-2)^{2022}$

b) $\sum_{k=2}^{2022} u_k = \sum_{k=2}^{2022} (-2)^k = (-2)^2 \cdot \frac{1 - (-2)^{2021}}{1 + 2} = \frac{4}{3} (1 + 2^{2021})$

3) a) C'est une suite arithmético-géométrique.

$$l = 2l - 1 \Leftrightarrow l = 1.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2v_n \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n.$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 1 = \underline{2^n + 1}.$$

b) C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Soit l'équation $X^2 + 2X - 2 = 0$.

$\Delta = 4 + 8 = 12 > 0$. Il y a 2 racines réelles

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} - 1 \text{ et } x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}.$$

$$\text{donc } \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A(\sqrt{3} - 1)^n + B(-1 - \sqrt{3})^n.$$

On détermine A et B.

$$u_0 = 2 = A + B.$$

$$u_1 = 0 = A(\sqrt{3}-1) + B(-1-\sqrt{3})$$

$$\text{Donc } B = 2 - A \text{ et } 0 = A(\sqrt{3}-1) + (2-A)(-1-\sqrt{3})$$

$$\text{Donc } B = 2 - A \text{ et } 0 = A(\sqrt{3}-1+1+\sqrt{3}) - 2(1+\sqrt{3})$$

$$\text{donc } A = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ et } B = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3}-1)^n + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)(-1-\sqrt{3})^n.$$

©