BCPST 1.1 & 1.2

Devoir Surveillé n°4

Samedi 16 décembre 2023

– EDL, dénombrement, suites récurrentes –

La clarté et la précision seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Les conclusions des questions, devront être soulignés ou $\boxed{\textbf{encadrés}}$. N'oubliez jamais que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question ou une sous-question.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Le sujet comporte 2 pages.

Exercice 1 - Calculs.

1. Les questions suivantes sont indépendantes. On donnera les réponses sous forme de factorielles, de puissances ou de coefficients binomiaux.
   (a) Pierre pioche simultanément au hasard 5 boules dans une urne contenant 7 boules numérotées de 1 à 7. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Le code antivol d'un autoradio est composé de quatre chiffres tous compris entre 0 et 9. Combien y a-t-il de codes possibles ?
   (c) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot CONCOURS ?
   (d) Une compagnie aérienne dessert 20 capitales. Combien de lignes aériennes peut-elle exploiter ? On précise qu'une ligne est une liaison entre 2 villes. Par exemple entre Paris et Londres, il y a une ligne (et non 2).
   (e) Une compagnie ferroviaire exploite 45 lignes. Combien dessert-elle de villes, sachant qu'il y a une ligne entre chaque paire de villes ? (même définition de "ligne" qu'à la question précédente)
2. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, le système $\begin{cases} y' + \dfrac{t}{t^2+2} y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Exercice 2 - Étude d'une suite récurrente.

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \frac{3x}{1+2x}$$

1. Étude de f
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ? On notera $\mathscr{D}$ cet ensemble.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et calculer sa dérivée.
   (c) En déduire les variations de f.
2. **Étude d'une suite.**
   On considère la suite définie par :
   $$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$. Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (d) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (e) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
   (f) Déduire ensuite, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
   (g) Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?
3. **Informatique**
   (a) Écrire une fonction python `suite(n)` qui prend en entrée un entier naturel `n` et qui renvoie le terme u_n de la suite étudiée.

(b) Écrire une fonction python `produit(n)` qui prend en entrée un entier naturel `n` et qui renvoie le produit $\prod_{k=0}^{n} u_k$.

(c) Écrire une fonction python `assez_grand(e)` qui prend en entrée un réel $e > 0$ et qui renvoie le premier entier n tel que $u_n > 1 - e$. (On peut montrer - mais ce n'est pas demandé - que cet entier existe).

Exercice 3 - EDL du premier ordre.

Dans cet exercice, on cherche à résoudre l'équation différentielle suivante sur $]1, +\infty[$.

$$\text{(E)} \quad y' - y = \frac{t^3 + t^2 + 1}{t^2 + t - 2}\mathbf{e}^t + \cos(t)$$

1. Justifier que cette équation est bien définie sur $]1, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
3. Pour $t \in]1, +\infty[$, on pose $h(t) = \dfrac{t^3 + t^2 + 1}{t^2 + t - 2}$.
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que
   $$\forall t \in]1, +\infty[,\ h(t) = t + \frac{at + b}{t^2 + t - 2}$$
   (b) En déduire une primitive de h sur $]1, +\infty[$.
4. Déterminer une solution particulière f_1 de l'équation (E_1) : $y' - y = \dfrac{t^3 + t^2 + 1}{t^2 + t - 2}\mathbf{e}^t$.
5. Déterminer une solution particulière f_2 de l'équation (E_2) : $y' - y = \cos(t)$.
   On pourra la chercher sous la forme $t \mapsto \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
6. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4 - EDL du second ordre.

On considère l'équation différentielle que l'on cherche à résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\text{(E)} : \ y'' \cos(t) - 2y' \sin(t) + 3y\cos(t) = 0$$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Rappeler l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $y'' - \alpha y = 0$.
2. Soit f et g deux fonctions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On suppose que $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ g(t) = f(t)\cos(t)$.
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ si, et seulement si, g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   On admet dans la suite que cette propriété est vraie en replaçant "dérivable" par "deux fois dérivable".
   (b) On suppose que f et g sont deux fois dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Exprimer, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(t)$ et $g''(t)$ à l'aide de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
   (c) Montrer que f est solution de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ si, et seulement si, g est solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ d'une équation différentielle linéaire du second ordre, notée (E′) que l'on précisera.
   (d) Donner l'ensemble des solutions de (E′).
   (e) En déduire l'ensemble des solutions de (E).