Exercice 1 On définit les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Parmi les matrices, lesquelles peut-on multiplier ? Donner la taille des produits puis les calculer.
   Correction On peut former les produits suivants :

   (a) $AC \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $AC = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $DA \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $DA = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -5 \end{pmatrix}$

   (c) $CB \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $CB = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

   (d) $BE \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $BE = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

   (e) $E \times D \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $E \times D = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (f) $DC \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ et $DC = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$

   (g) $CE \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $CE = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

   (h) $B^2 \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

   (i) $A^2 \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -5 \\ 8 & 13 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Donner leur transposée.
   Correction

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ E^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $A(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $A(x)A(y)$.
2. Soit $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Déterminer $(A(x))^n$.

Correction

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} A(x)A(y) & = & \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \cos(y) & -\sin(y) \\ \sin(y) & \cos(y) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) & -\cos(x)\sin(y) - \sin(x)\cos(y) \\ \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y) \end{pmatrix} \end{array} \\ & = & \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} \\ A(x)A(y) & = & A(x+y) \end{array}$$

2. On va démontrer par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (A(x))^k = A(kx)$.
   Posons pour $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$: "$\forall x \in \mathbb{R},\ (A(x))^k = A(kx)$"
   Initialisation : Pour $k = 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $A(x)^0 = I_2$ et $A(0x) = A(0) = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = I_2$
   donc $P(0)$ est vraie.
   Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ pour lequel $P(k)$ est vrai.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (A(x))^{k+1} &= (A(x))^k \times A(x) \\ &= A(kx) \times A(x) \text{ par l'hypothèse de récurrence} \\ &= A(kx + x) \text{ par la question 1} \\ &= A((k+1)x) \end{aligned}$$

   Conclusion : On a donc démontré que $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (A(x))^k = A(kx)$.

Exercice 3 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les puissances des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction

1. Pour les puissances de A, on va calculer les premières puissances et conjecturer une formule.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ab & a^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2b & a^3 \end{pmatrix} \\ A & A^2 & A^3 \end{array}$$

   On propose donc de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$: $A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ ka^{k-1}b & a^k \end{pmatrix}$
   Initialisation : Pour $k = 1$, on trouve bien à droite la définition de A donc P(1) est vraie.
   Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la formule est vraie.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \\ A^{k+1} = A^k \times A = & \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ ka^{k-1}b & a^k \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ ka^kb + ba^k & a^{k+1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ (k+1)a^kb & a^{k+1} \end{pmatrix}$$

   Conclusion : La formule proposée est vraie.

2. Pour les puissances de B, on fait la même chose.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ B & B^2 & B^3 \end{array}$$

   On remarque alors que $B^3 = -I_2$. On en déduit que : $B^4 = -B$, $B^5 = -B^2$ et $B^6 = I_2$.
   Puis, $B^7 = B$, ...

La forme de la puissance va donc dépendre du reste dans la division euclidienne de k par 6.
$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists!(\ell, r) \in \mathbb{N} \times [\![0,5]\!]$ tel que $k = 6\ell + r$.

$$B^k = \begin{cases} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ pour } k = 6\ell \\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \text{ pour } k = 6\ell+1 \\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} \text{ pour } k = 6\ell+2 \\ \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \text{ pour } k = 6\ell+3 \\ \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \text{ pour } k = 6\ell+4 \\ \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ pour } k = 6\ell+5 \end{cases}$$

3. Pour la matrice C, on va appliquer le binôme de Newton. On sépare C sous la forme $C = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Les matrices N et I_3 commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ C^k = (I_3 + N)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} N^\ell I_3^{k-\ell}$$

Nous avons remplacé le calcul des puissances de C par celui des puissances de N. Toutefois, ces dernières sont beaucoup plus faciles à calculer.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ N & N^2 & N^3 \end{array}$$

La somme précédente s'arrête donc à l'indice $\ell = 2$.

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N},\ C^k &= \binom{k}{0} N^0 + \binom{k}{1} N + \binom{k}{2} N^2 = I_3 + kN + \frac{k(k-1)}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + k \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2} \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & k & \frac{k(k+1)}{2}\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Pour la matrice D, nous également appliquer le binôme de Newton. On sépare D sous la forme $C = I_3 + M$ où $M = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Les matrices M et I_3 commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ D^k = (I_3 + M)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{l} M^\ell I_3^{k-\ell}$$

Nous avons remplacé le calcul des puissances de D par celui des puissances de M. Toutefois, ces dernières sont beaucoup plus faciles à calculer.

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
M & M^2 & M^3
\end{array}$$

La somme précédente s'arrête donc à l'indice $\ell = 2$.

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbb{N},\ D^k &= \binom{k}{0}M^0 + \binom{k}{1}M + \binom{k}{2}M^2 = I_3 + kM + \frac{k(k-1)}{2}M^2\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&k&\frac{k(k-1)}{2}\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A - 3I_n = 0$.
   Déterminer A^3 et A^4.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Montrer que $(I_4 - A)(I_4 + A + A^2 + A^3) = I_4 - A^4$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$.
   (a) Quelle est la taille des matrices A^T, A^TA et AA^T ?
   (b) Quels sont les coefficients sur la diagonale de AA^T ?
   (c) Montrer que les matrices A^TA et AA^T sont symétriques.

Correction

1. $A^2 + 2A - 3I_n = 0 \Leftrightarrow A^2 = 3I_n - 2A$
   Donc, $A^3 = A.A^2 = 3A + 2A^2 = 3A - 6I_n + 4A = -6I_n + 7A$.
   De même, $A^4 = A^3.A = -6A + 7A^2 = -6A + 21I_n - 14A = 21I_n - 20A$.
2. On développe par distributivité.
$$(I_4 - A)(I_n + A + A^2 + A^3) = I_n + A + A^2 + +A^3 - A - A^2 - A^3 - A^4 = I_n - A^4$$
3. (a) La matrice A^T est de taille 2×3. Donc, A^TA est de une matrice carrée de taille 2.
   La matrice $A.A^T$ est une matrice carrée de taille 3.
   (b) Soit $i \in [\![1, 2]\!]$.
$$\left(A^T.A\right)_{i,i} = \sum_{k=1}^{2}(A^T)_{i,k}.A_{k,i} = \sum_{k=1}^{2} a_{k,i}^2$$
   Soit $i \in [\![1, 3]\!]$.
$$\left(A.A^T\right)_{i,i} = \sum_{k=1}^{3}(A)_{i,k}.A^T_{k,i} = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k}^2$$
   (c) $(A^TA)^T = A^T.(A^T)^T = A^T.A$ donc $A^T.A$ est symétrique.
   $(A.A^T)^T = (A^T)^T.A^T = A.A^T$ donc $A.A^T$ est aussi symétrique.

Exercice 5 Calculer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction

1. Pour les matrices de taille 2×2, on sait que la valeur du déterminant est un critère d'inversibilité. $\det(A) = -1 \times 1 - 2 \times 1 = -3 \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Pour les matrices de taille 2×2, on sait que la valeur du déterminant est un critère d'inversibilité. $\det(B) = 1 \times 1 - \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 2 \neq 0$ donc B est inversible et $B^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 1 \end{pmatrix}$.
3. Pour les matrices de taille 3×3, on applique la méthode du pivot de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-2}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 6L_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{-3}{2} \\ -1 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 1 & \dfrac{-3}{2} \\ -1 & -1 & 3 \\ \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{-1}{2} \end{pmatrix}$

4. Pour les matrices 4×4, on applique aussi l'algorithme de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_4 \leftarrow L_3 \leftarrow L_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc D est inversible et $D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 6 *Avec un polynôme annulateur*

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 - 3A + 3I_3 = 0_3$. En déduire que A est inversible et la valeur de son inverse.
2. Posons $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $B^3 - 3B^2 + B - 5I_3 = 0_3$. En déduire que B est inversible et la valeur de son inverse.

Correction

1. On calcule A^2 puis A^3.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

On calcule $A^3 - 3A + 3I_3$.

$$A^3 - 3A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

et on trouve bien la relation souhaitée.

$$\begin{aligned} A^3 - 3A + 3I_3 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad A^3 - 3A = -3I_3 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{-1}{3}A^3 + A = I_3 \\ &\Leftrightarrow \quad A \times (-\frac{1}{3}A^2 + I_3) = I_3 \\ &\Leftrightarrow \quad (-\frac{1}{3}A^2 + I_3) \times A = I_3 \end{aligned}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = I_3 - \frac{1}{3}A^2$.

2. On calcule B^2 et B^3 et on trouve la relation souhaitée.

$$\begin{aligned} B^3-3B^2+B-5I_3=0_3 &\Leftrightarrow B^3-3B^2+B=5I_3 \\ &\Leftrightarrow B\times(\frac{1}{5}B^2-\frac{3}{5}B+\frac{1}{5}I_3)=I_3 \\ &\Leftrightarrow (\frac{1}{5}B^2-\frac{3}{5}B+\frac{1}{5}I_3)\times B=I_3 \end{aligned}$$

Donc B est inversible et $B^{-1}=\frac{1}{5}B^2-\frac{3}{5}B+\frac{1}{5}I_3$.

Exercice 7 Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1&5&0\\-3&11&-2\end{pmatrix}$.

1. On veut résoudre l'équation $AX=B$ d'inconnues X. Quelle est la taille de la matrice X ? Déterminer les solutions X.
2. On veut résoudre l'équation $YA=B$ d'inconnues Y. Quelle est la taille de la matrice Y ? Déterminer les solutions Y.

Correction

1. Pour pouvoir faire le produit AX, il faut que la matrice X ait 2 lignes. Pour résoudre $AX=B$, il faut que le produit AX soit de la même taille que la matrice B donc il faut que AX ait 3 colonnes : $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

   $\det(A)=-5-1\neq 0$ donc A est inversible et $AX=B\Leftrightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-2&2&-4\\0&4&2\end{pmatrix}$
2. Pour pouvoir faire le produit YA, il faut que Y ait 2 colonnes. Pour résoudre $YA=B$, il faut que le produit YA soit de la même taille que B. Or, dans ce cas, le produit YA a 2 colonnes, ce qui est incompatible avec $YA=B$.
   Cette équation matricielle n'a aucune solution.

Exercice 8 Résoudre les systèmes suivants :

$$1)\ \begin{cases} x+3y-z=-1\\ 2x+5y+z=0\\ 3x+2z=3\end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} -y-z=1\\ 4x+3y+11z=-2\\ 2x-y+4z=1\end{cases}$$

Correction

1. On va passer par l'écriture matricielle. Posons $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&5&1\\3&0&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$.

   Le système est équivalent à $AX=B$. Si la matrice A est inversible alors ce système a une unique solution : $X=A^{-1}B$.
   On va appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan à A.

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&5&1\\3&0&2\end{pmatrix} \text{ et } I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-1&3\\3&0&2\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-3L_1}{\Rightarrow}\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-1&3\\0&-9&5\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -9 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 9L_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -22 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 15 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-22}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{-15}{22} & \frac{9}{22} & \frac{-1}{22} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{22} & \frac{5}{22} & \frac{-3}{22} \\ \frac{-15}{22} & \frac{9}{22} & \frac{-1}{22} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{7}{22} & \frac{9}{22} & \frac{-1}{22} \\ \frac{-1}{22} & \frac{5}{22} & \frac{-3}{22} \\ \frac{-15}{22} & \frac{9}{22} & \frac{-1}{22} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{1}{22} & \frac{-6}{22} & \frac{8}{22} \\ \frac{-1}{22} & \frac{5}{22} & \frac{-3}{22} \\ \frac{-15}{22} & \frac{9}{22} & \frac{-1}{22} \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 \\ -1 & 5 & -3 \\ -15 & 9 & -1 \end{pmatrix}$.

Le système a donc une unique solution $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{7}{11} \\ \frac{-4}{11} \\ \frac{6}{11} \end{pmatrix}$ (on retrouve le résultat du chapitre 12).

2. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 11 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 11 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 11 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{5}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{5} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{-5}{2} L_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{5} L_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -10 & 2 & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{-17}{2} & \frac{5}{2} & \frac{-14}{15} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow \frac{L_2}{2}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{-17}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-7}{15} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-17}{4} & \frac{5}{4} & \frac{-7}{15} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{-5}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Le système a donc une unique solution $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{-1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 9 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par

$$u_0 = 1,\ v_0 = 2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$$

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Proposer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de A, de n et de X_0.
3. On pose $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances successives de N.
4. En déduire les puissances successives de A.
5. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

Correction

1. On peut réécrire la définition des deux suites sous forme matricielle :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
.
La matrice A est donc définie par $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. On peut appliquer la formule précédente à l'indice n puis à l'indice $n-1$, ..., jusqu'à l'indice 0 pour obtenir
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \times \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$
3.
$$\underset{N}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{N^2}{\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}} \quad \underset{N^3}{\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}} \quad \underset{N^4}{\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \end{matrix}}$$
. On conjecture que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ N^k = 2^{k-1}N$. On démontre ce résultat par récurrence.
I : Pour $k = 1$, $2^{k-1} = 2^0 = 1$ donc $P(1)$ est vraie.
H : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(k)$ soit vraie.
$N^{k+1} = N^k.N = 2^{k-1}N.N = 2^{k-1}N^2 = 2^{k-1}.2N = 2^kN$ donc $P(k+1)$ est vraie.
C $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ N^k = 2^{k-1}N$.
4. On va appliquer le binôme de Newton à $A = I_2 + N$ car les matrices I_2 et N commutent.
$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = (I_2+N)^k = \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}N^\ell I_2^{k-\ell} = I_2 + \sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}2^{\ell-1}N = I_2 + \left(\sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}2^{\ell-1}\right)N$$
Or, $\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}2^{\ell-1} = \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{k}\binom{k}{\ell}2^\ell = \frac{1}{2}\left(\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}2^l - 1\right) = \frac{1}{2}(3^k-1)$.
Finalement,
$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = I_2 + \frac{1}{2}(3^k-1)N = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}(3^k-1) & \frac{1}{2}(3^k-1) \\ \frac{1}{2}(3^k-1) & 1+\frac{1}{2}(3^k-1) \end{pmatrix}$$
5. On revient alors à la formule de la question 2.
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}(3^n-1) & \frac{1}{2}(3^n-1) \\ \frac{1}{2}(3^n-1) & 1+\frac{1}{2}(3^n-1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{3}{2}(3^n-1) \\ 2+\frac{3}{2}(3^n-1) \end{pmatrix}$$
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + \frac{3}{2}(3^n-1)$ et $v_n = 2 + \frac{3}{2}(3^n-1)$.

Exercice 10 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$, puis déterminer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Exprimer A en fonction de D, P, P^{-1}, puis A^n en fonction de D, P, P^{-1} et n.
4. En déduire une expression de A^n en fonction de n.
5. On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par la donnée de leurs premiers termes, respectivement x_0, y_0 et z_0, et de la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - z_n \\ y_{n+1} = -4x_n + 2z_n \\ z_{n+1} = z_n \end{cases} \quad \text{et on pose :} \forall n \in \mathbb{N}, \ X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre X_{n+1}, X_n et A.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n en fonction de A, n et X_0.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n, y_n et z_n en fonction de n, x_0, y_0 et z_0.

Correction

1. On va appliquer l'algorithme du pivot de Gauss.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

   Donc, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   La matrice D est diagonale donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PD = AP \Leftrightarrow PDP^{-1} = A$.
   On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
   I Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = P.P^{-1} = I_3$ donc $P(0)$ est vraie.
   H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.
   $$A^{n+1} = A^n.A = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^n.DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$
   donc $P(n+1)$ est vraie.
   C $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$
   $$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 0 \\ -2^{n+1} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1-2^n \\ -2^{n+1} & 0 & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$
   Donc, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1-2^n \\ -2^{n+1} & 0 & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. (a) $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
   (b) On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1-2^n \\ -2^{n+1} & 0 & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2^nx_0 + (1-2^n)z_0 \\ -2^{n+1}x_0 + (2^{n+1}-2)z_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \end{array}$$
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 2^nx_0 + (1-2^n)z_0$, $y_n = -2^{n+1}x_0 + (2^{n+1}-2)z_0$ et $z_n = z_0$.