Exercice 1 Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$

Correction

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 3 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ & - & 3y & - & z & = & -5 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ & - & 3y & - & z & = & -5 \\ & - & 2y & - & z & = & -4 \end{array}\right.$$
$$\underset{L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ & - & 3y & - & z & = & -5 \\ & & & - & z & = & -2 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4 - y - 2z \\ y & = & \dfrac{z-5}{-3} \\ z & = & 2 \end{array}\right.$$

Donc le système est de rang 3. C'est un système de Cramer et $S = \{(-1, 1, 2)\}$.

2. $\left\{\begin{array}{l} x + 3y - z = -1 \\ 2x + 5y + z = 0 \\ 3x + 2z = 3 \end{array}\right.$

Correction

$$\left\{\begin{array}{l} x + 3y - z = -1 \\ 2x + 5y + z = 0 \\ 3x + 2z = 3 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x + 3y - z = -1 \\ -y + 3z = 2 \\ 3x + 2z = 3 \end{array}\right.$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x + 3y - z = -1 \\ -y + 3z = 2 \\ -9y + 5z = 6 \end{array}\right.$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x + 3y - z = -1 \\ -y + 3z = 2 \\ -22z = -12 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z - 3y - 1 \\ y & = & 3z - 2 \\ z & = & \dfrac{6}{11} \end{array}\right.$$

Donc le système est de rang 3, de Cramer et $S = \left\{\left(\dfrac{7}{11}, \dfrac{-4}{11}, \dfrac{6}{11}\right)\right\}$.

3. $\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + y = 1 \end{array}\right.$

Correction

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+2y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x+y=2 \\ \frac{3}{2}y=0 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Donc le système est de rang 2, de Cramer et $S=\{(1,0)\}$.

4. $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 4z=3 \end{cases}$

Correction Le système est échelonné de rang 2.

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 4z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+y-2z \\ z=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-\frac{1}{2} \\ z=\frac{3}{4} \end{cases}$$

Donc le système est compatible et $S=\left\{\left(y-\frac{1}{2}, y, \frac{3}{4}\right), y \in \mathbb{R}\right\}$.

5. $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 4x+4y+3z=3 \\ 5x+2y+5z=3 \end{cases}$

Correction

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 4x+4y+3z=3 \\ 5x+2y+5z=3 \end{cases} & \underset{L_2 \leftarrow 3L_2-4L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 4y+5z=-11 \\ 5x+2y+5z=3 \end{cases} \\ & \underset{L_3 \leftarrow 3L_3-5L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 4y+5z=-11 \\ -4y+10z=-16 \end{cases} \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 4y+5z=-11 \\ 15z=-27 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5-2y-z}{3}=\frac{13}{5} \\ y=\frac{-11-5z}{4}=\frac{-1}{2} \\ z=\frac{-27}{15}=\frac{-9}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Le système est de rang 3, de Cramer et $S=\left\{\left(\frac{13}{5}, \frac{-1}{2}, \frac{-9}{5}\right)\right\}$.

6. $\begin{cases} 2x+2y-z=-1 \\ x+4y+z=-2 \\ x-2y-2z=1 \end{cases}$

Correction

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+2y-z=-1 \\ x+4y+z=-2 \\ x-2y-2z=1 \end{array}\right. \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x+4y+z=-2 \\ 2x+2y-z=-1 \\ x-2y-2z=1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x+4y+z=-2 \\ -6y-3z=3 \\ x-2y-2z=1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x+4y+z=-2 \\ -6y-3z=3 \\ -6y-3z=3 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{r} x+4y+z=-2 \\ -6y-3z=3 \\ 0=0 \end{array}\right.$$

Le système est donc de rang 2, compatible et $S=\left\{(z, \dfrac{-z-1}{2}, z), z\in\mathbb{R}\right\}$.

Exercice 2 Déterminer, selon les valeurs de $a\in\mathbb{R}$, le nombre de solutions du système suivant

1. $\left\{\begin{array}{l} ax+3y=1 \\ 3x+ay=1 \end{array}\right.$

Correction On détermine un système échelonné équivalent.

- Si $a=0$, le système est de Cramer et $S=\left\{\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)\right\}$.
- Si $a\neq 0$,

$$\left\{\begin{array}{l} ax+3y=1 \\ 3x+ay=1 \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-\frac{3}{a}L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} ax+3y=1 \\ \left(a-\frac{9}{a}\right)y=\frac{a-3}{a} \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow aL_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} ax+3y=1 \\ \left(a^2-9\right)y=a-3 \end{array}\right.$$

- Si $a=3$,

$$\left\{\begin{array}{l} ax+3y=1 \\ 3x+ay=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1-3y}{3} \\ 0=0 \end{array}\right.$$

  Le système est compatible et $S=\left\{\left(\dfrac{1-3y}{3}, y\right)\right\}$.

- Si $a=-3$,

$$\left\{\begin{array}{l} ax+3y=1 \\ 3x+ay=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1-3y}{a} \\ 0=-6 \end{array}\right.$$

  Le système est incompatible et $S=\varnothing$.

- Si $a\neq 3$ et $a\neq -3$, on peut diviser par $(a-3)(a+3)$ et

$$\left\{\begin{array}{l} ax+3y=1 \\ 3x+ay=1 \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow \frac{1}{a^2-9}L_2}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{1-3y}{a} \\ \\ y=\dfrac{1}{a+3} \end{array}\right.$$

  Le système est de Cramer et $S=\left\{\left(\dfrac{1}{a+3}, \dfrac{1}{a+3}\right)\right\}$.

2. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases}$

Correction On détermine un système échelonné équivalent.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases}$$
$$\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (a-2)y+4z=1 \end{cases}$$

- Si $a=2$, le système est échelonné de rang 3 et $S=\left\{(1,\frac{1}{4},\frac{1}{4})\right\}$.
- Si $a\neq 2$, on continue l'algorithme de Gauss.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (a-2)y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-(a-2)L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (6+a-a^2)z=3-a \end{cases}$$

Or, $6-a-a^2=-(a-3)(a+2)$ donc

- Si $a=3$, le système initial est équivalent à $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \\ 0=0 \end{cases}$.

  Le système est de rang 2 et $S=\{(5z,1-4z,z), z\in\mathbb{R}\}$.
- Si $a=-2$, le système initial est équivalent à $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y-zz=1 \\ 0=5 \end{cases}$.

  Le système est incompatible et $S=\varnothing$.
- Si $a\neq 2$, $a\neq 3$, $a\neq -2$, le système est de rang 3 et $S=\left\{\left(1,\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2}\right)\right\}$.

Exercice 3 Résoudre les systèmes suivants

1. $\begin{cases} x-y+z-t=1 \\ x+y-z-t=-1 \\ x+y+z-t=0 \\ x-y-z+t=2 \end{cases}$

   Correction $S=\left\{\left(1,\frac{-1}{2},\frac{1}{2},1\right)\right\}$.
2. $\begin{cases} x-2y+z-3t=1 \\ 2x+y-z+t=-1 \end{cases}$

   Correction $S=\left\{\left(\frac{z+t-1}{5},\frac{3z-7t-3}{5},z,t\right),(z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}$
3. Soit $m\in\mathbb{R}$ fixé. $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ 2x-y+z-t=0 \\ x-3y-2t=m \end{cases}$

   Correction $S=\{(-3-2m+2t,-m-1,5+3m-3t,t),\ t\in\mathbb{R}\}$

Exercice 4 Soit $f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{array} \right.$
Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Correction Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ fixé quelconque.

$$f(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=a-x \\ 2x=a+b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=\dfrac{a-b}{2} \\ x=\dfrac{a+b}{2} \end{array} \right.$$

Le système est de Cramer donc f est bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (a,b) \mapsto \left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a-b}{2}\right) \end{array} \right.$

Exercice 5 Soit u la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ u(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z)$$

Est-ce que u est bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$?

Correction Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

$$f(x,y,z) = (a,b,c,d) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x+y=a \\ x-y=b \\ -x+z=c \\ -y+z=d \end{array} \right. \Rightarrow a=-b$$

Donc, (1,1,0,0) n'a pas d'antécédent par f. Donc, f n'est pas bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$.