Chapitre 15 : Géométrie dans $\mathbb{R}^2$

Table des matières

Dans tout le chapitre, on notera $\mathcal{P}$ le plan.

1 Vecteurs de $\mathbb{R}^2$

1.1 Vecteurs et points

Définition 1.

On appelle <u>vecteur de $\mathbb{R}^2$</u> un couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

Pour représenter les points du plan $\mathcal{P}$, on utilise le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où
- O est l'origine du repère,
- $\vec{i}$ est le vecteur $(1, 0)$
- $\vec{j}$ est le vecteur $(0, 1)$

A tout point M du plan, on associe le vecteur $\overline{u}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
A tout $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on associe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P} \\ \vec{u} \mapsto M \end{array} \right. \quad \text{est une bijection de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathcal{P}.$$

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan $\mathcal{P}$.
On définit <u>le vecteur $\overrightarrow{AB}$</u> comme l'unique vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.

1.2 Opérations sur les vecteurs

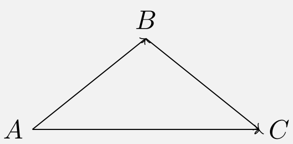
Définition 2.

Soient $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ et $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
1. On définit le vecteur $\overrightarrow{u + v}$ comme l'unique vecteur de coordonnées $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
2. On définit le vecteur $\overrightarrow{\lambda.u}$ comme l'unique vecteur de coordonnées $(\lambda.x_1, \lambda.y_1)$.

Théorème 3 (Relation de Chasles)**.**

Soient A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



1.3 Vecteurs colinéaires et déterminant

Définition 4.

Soient $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
On appelle <u>déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$</u> le déterminant de la matrice carrée $\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$.

Définition 5.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsque

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{u} = \lambda \vec{v}.$$

Théorème 6.

Soient $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \quad &\Longleftrightarrow \quad xy' - x'y = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Exemple 7 Soient $\vec{u} = (1, 2)$ et $\vec{v} = (-2, \alpha)$. Pour quelles valeurs du réel α les deux vecteurs sont-ils colinéaires ?

1.4 Produit scalaire et vecteurs orthogonaux

Définition 8.

Soient $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'.$$

Remarque 9 Cette définition du produit scalaire (avec les coordonnées des vecteurs) est cohérente avec la définition du produit scalaire qui utilise l'angle géométrique des vecteurs :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}).$$

Définition 10.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Exemple 11

1. $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$ sont-ils orthogonaux ?
2. $(-1, 2)$ et $(2, 1)$ sont-ils orthogonaux ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de α réel les vecteurs $(1, -1)$ et $(2, \alpha)$ sont-ils orthogonaux ?

Methode 1.

Soit $\vec{u} = (a, b)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
Le vecteur $\vec{p} = (-b, a)$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Théorème 12 (Identités remarquables)**.**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
1. $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$.
2. $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$.
3. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{v}\vec{v}$.

Théorème 13.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Soient λ et μ deux réels.
1. Le produit scalaire est symétrique : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
2. Le produit scalaire est linéaire : $(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}).\vec{u} = \lambda\vec{v}.\vec{u} + \mu\vec{w}.\vec{u}$
3. Le produit scalaire est défini : $\vec{u}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
4. Le produit scalaire est positif : $\vec{u}.\vec{u} \geq 0$.

Remarque 14 On résume ces propriétés en disant que le produit scalaire est une **forme bilinéaire symétrique définie positive** sur $\mathbb{R}^2$.

1.5 Norme euclidienne

Définition 15.

Soit $\vec{u} = (x, y)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On appelle norme euclidienne de $\vec{u}$ le réel :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On dit que le vecteur $\vec{u}$ est unitaire lorsque $||\vec{u}|| = 1$.

Exemple 16 Déterminer les normes des vecteurs suivants : $(3, -4)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $(1, 4)$.

Théorème 17.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :
1. $||\lambda\vec{u}|| = |\lambda|\ ||\vec{u}||$,
2. $||\vec{u}|| \geq 0$,
3. $||\vec{u}|| = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Théorème 18 (Inégalité triangulaire)**.**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
1. $||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$,
2. $\big|||\vec{u}|| - ||\vec{v}||\big| \leq ||\vec{u}-\vec{v}||$.

Théorème 19 (Théorème de Pythagore)**.**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$.

Exemple 20 Tracer un triangle ABC, isocèle en A, tel que $AB = AC = 5cm$ et $BC = 7cm$.
Ce triangle est-il rectangle isocèle ?

Théorème 21 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, Admis)**.**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

1. $|\vec{u}.\vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.
2. On a égalité si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1.6 Bases orthonormées

Définition 22.

- On appelle base de $\mathbb{R}^2$ une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ non colinéaires.
- On parle de base orthogonale lorsque les vecteurs sont orthogonaux.
- On parle de base orthonormée lorsque les vecteurs sont orthogonaux et unitaires.

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = 0, \\ ||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 1. \end{cases}$$

Exemple 23 Soient $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Montrer que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormé de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 24 (Coordonnées dans une base)**.**

Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ une base de $\mathbb{R}^2$.

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2, \ \exists\, !(a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \vec{u} = a\vec{e_1} + a\vec{e_2}$$

On dit que (a, b) sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Exemple 25

1. Montrer que $(\vec{e_1} = (1, 0), \vec{e_2} = (1, 1))$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les coordonnées de $\vec{u} = (2, -5)$ dans cette base.

2 Droites et cercles du plan

2.1 Cercles

Définition 26.

Soit A un point du plan $\mathcal{P}$. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$.
On appelle cercle de centre A et de rayon R l'ensemble des points dont la distance à C vaut R.

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in \mathcal{P} \ / \ ||\overrightarrow{AM}|| = R \right\}$$

Théorème 27.

Soit $A(x_A, y_A)$ un point du plan $\mathcal{P}$. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon R.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad ||\overrightarrow{AM}||^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2 \end{aligned}$$

On obtient une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

Exemple 28 Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$.

2.2 Droites du plan

Définition 29.

Soit A un point du plan $\mathcal{P}$ et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
On appelle droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ l'ensemble des points M du plan $\mathcal{P}$ tel que
$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires.

$$\mathcal{D} = \left\{ M \in \mathcal{P} / \exists t \in \mathbb{R}, \ \ \overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{u} \right\}$$

On note (AB) la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

Théorème 30.

Soit $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathcal{P}$ et soit $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

$$M(x,y) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \ , \ \left\{ \begin{array}{l} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{array} \right.$$

C'est la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Exemple 31 Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par $A(1, -3)$ et $B(2, 1)$.

Théorème 32.

Soit $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathcal{P}$ et soit $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \beta x - \alpha y + \alpha y_A - \beta x_A = 0 \end{aligned}$$

Définition 33.

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
On appelle vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$ tout vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

Théorème 34.

Soit $A(x_A, y_A)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et soit $\overrightarrow{n} = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad A\vec{M}.\vec{n} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha.x + \beta.y - \alpha.x_A - \beta.x_B = 0 \end{aligned}$$

On obtient une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$.

Exemple 35 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(-1, 2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (1, 3)$.

Exemple 36 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(0, 2)$, et de vecteur directeur $\vec{u} = (-1, 2)$.

Exemple 37 Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x+2y+1 = 0$. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Exemple 38 Déterminer une équation catésienne de la droite parallèle à $\mathcal{D} : x + 2y + 1 = 0$, passant par $(1, 0)$.

Théorème 39.

L'intersection de deux droites du plan est :

1. Soit une droite. Dans ce cas, on dit que ces deux droites sont confondues.
2. Soit un point. Dans ce cas, on dit que ces deux droites sont sécantes.
3. Soit l'ensemble vide. Dans ce cas, on dit que les deux droites sont parallèles distinctes.

Exemple 40 Déterminer l'intersection des droites $\mathcal{D} : 2x - y + 1 = 0$ et $\mathcal{D}' : -x + y + 3 = 0$.

Methode 2.

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax+by+c=0$.

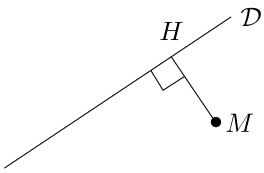
1. Les points $\left(0, \dfrac{-c}{b}\right)$ et $\left(\dfrac{-c}{a}, 0\right)$ appartiennent à la droite $\mathcal{D}$.
2. Le vecteur $\vec{n} = (a,b)$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$.
3. Le vecteur $\vec{u} = (-b,a)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

2.3 Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition 41.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
Soit M un point du plan $\mathcal{P}$.
On appelle projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ l'unique point H du plan $\mathcal{P}$ tel que

$$\begin{cases} H \in \mathcal{D} \\ \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u} = 0 \end{cases}$$



Exemple 42 Soit $\mathcal{D} : x+2y-1=0$ et $M(2,1)$. Déterminer le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Définition 43.

Soit M un point du plan et $\mathcal{D}$ une droite du plan. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.
On appelle distance de M à $\mathcal{D}$ la distance MH. On la note $\mathrm{d}(M,\mathcal{D})$.

Exemple 44 Soit $A(1,1)$. Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation paramétrique est $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -3+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
Déterminer la distance de A à $\mathcal{D}$.

Théorème 45.

Soit A, B et C trois points du plan $\mathcal{P}$. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\left|\overrightarrow{AH}\right|\right| . \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$$