Chapitre 16 : Géométrie dans $\mathbb{R}^3$

Table des matières

Dans tout le chapitre, on notera $\mathcal{E}$ l'espace muni d'un repère orthonormal.

1 Vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$

1.1 Vecteurs et points de $\mathbb{R}^3$

Définition 1.

On appelle vecteur de $\mathbb{R}^3$ un triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^2$.

Pour représenter les points de l'espace $\mathcal{E}$, on utilise le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où

- O est l'origine du repère,
- $\vec{i}$ est le vecteur $(1, 0, 0)$
- $\vec{j}$ est le vecteur $(0, 1, 0)$
- $\vec{k}$ est le vecteur $(0, 0, 1)$

A tout point M de l'espace, on associe le vecteur $\overline{u}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
A tout $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$, on associe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathcal{E} \\ \vec{u} \mapsto M \end{array} \right. \quad \text{est une bijection de } \mathbb{R}^E \text{ dans } \mathcal{E}.$$

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace $\mathcal{E}$.
On définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

1.2 Opérations sur les vecteurs

Définition 2.

Soient $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. On définit le vecteur $\overrightarrow{u + v}$ comme l'unique vecteur de coordonnées $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.
2. On définit le vecteur $\overrightarrow{\lambda.u}$ comme l'unique vecteur de coordonnées $(\lambda.x_1, \lambda.y_1, \lambda.z_1)$.

Théorème 3 (Relation de Chasles)**.**

Soient A, B et C trois points de l'espace.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

1.3 Colinéarité et coplanarité

Définition 4.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsque

$$\vec{u} = \vec{0},\ \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{u} = \lambda \vec{v}.$$

Remarque 5 On peut reformuler la définition en

$$\exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\ ,\ (\alpha,\beta)\neq(0,0)\text{ tel que }\alpha\vec{u}+\beta\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}.$$

On dit qu'il forme une famille liée.

Définition 6.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque

$$\exists\,(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3\ ,\ (\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)\text{ tel que }\alpha\vec{u}+\beta\overrightarrow{v}+\gamma\overrightarrow{w}=\overrightarrow{0}.$$

Exemple 7 Soient $A(1,0,1)$, $B(2,1,2)$, $C(1,1,3)$ et $D(0,0,2)$. Ces points sont-ils coplanaires ?

1.4 Produit scalaire

Définition 8.

Soient $\vec{u}=(x,y,z)$ et $\vec{v}=(x',y',z')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel :

$$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'.$$

Définition 9.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\vec{u}.\vec{v}=0$.

1.5 Norme euclidienne

Définition 10.

Soit $\vec{u}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On appelle norme euclidienne de $\vec{u}$ le réel :

$$||\vec{u}||=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

On dit que le vecteur $\vec{u}$ est unitaire lorsque $||\vec{u}||=1$.

Théorème 11.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On a :

1. $||\lambda\vec{u}||=|\lambda|\ ||\vec{u}||$,
2. $||\vec{u}||\geq 0$,
3. $||\vec{u}||=0\Rightarrow\vec{u}=\vec{0}$.

Théorème 12 (Inégalité triangulaire)**.**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. $||\vec{u}+\vec{v}||\leq||\vec{u}||+||\vec{v}||$,
2. $\big|||\vec{u}||-||\vec{v}||\big|\leq||\vec{u}-\vec{v}||$.

Théorème 13 (Théorème de Pythagore)**.**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$.

Théorème 14 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, admis)**.**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. $|\vec{u}.\vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.
2. On a égalité si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1.6 Bases orthonormées

Définition 15.

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^3$.

- On appelle base de $\mathbb{R}^3$ une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non coplanaires.
- On parle de base orthogonale lorsque les vecteurs sont orthogonaux deux à deux.
- On parle de base orthonormée lorsque les vecteurs sont orthogonaux deux à deux et unitaires.

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = 0, \\ \vec{u}.\vec{w} = 0, \\ \vec{v}.\vec{w} = 0, \\ ||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = ||\overrightarrow{w}|| = 1. \end{cases}$$

Exemple 16 Soient $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ et $\vec{w} = (1, 0, 0)$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$?

2 Droites et plans dans l'espace

2.1 Droites de l'espace

Définition 17.

Soit A un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.
On appelle droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ tous les points M de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires.

$$\mathcal{D} = \left\{M \in \mathbb{R}^3 / \exists k \in \mathbb{R},\ \ \overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{u}\right\}$$

Théorème 18.

Soit $(\Omega, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ un repère de $\mathbb{R}^3$.
Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $\overrightarrow{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \ , \ \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}$$

C'est la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

2.2 Plans de l'espace

Définition 19.

Soit A un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire des vecteurs non colinéaires.
On définit le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tous les points M de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient coplanaires.

Théorème 20.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et soit $(\overrightarrow{u} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \overrightarrow{v} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2))$ une base de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists (t, t') \in \mathbb{R}^2 \ , \ \begin{cases} x = x_A + t\alpha_1 + t'\alpha_2 \\ y = y_A + t\beta_1 + t'\beta_2 \\ z = z_A + t\gamma_1 + t'\gamma_2 \end{cases}$$

C'est la représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

Exemple 21 Soient $A(1, 0, 2)$, $B(0, -1, 3)$ et $C(1, 2, 3)$. Déterminer un système d'équations paramétriques du plan passant par A, B et C.

2.3 Intersection de plans

Définition 22.

Soit $\mathcal{P}$ un plan et $(\vec{u}, \vec{v})$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.
On appelle vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ tout vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Exemple 23 Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(-1, 2, 1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (1, 3, -2)$.

Exemple 24 Soit $\mathcal{P}$ le plan de l'espace passant par $B(1, 2, 0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1, 0, 1)$ et $\vec{v}(-1, 1, 2)$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Définition 25.

On dit que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux s'ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux.

Remarque : Si $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$,
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux si, et seulement si, $aa' + bb' + cc' = 0$.

Exemple 26 Déterminer une équation cartésienne d'un plan orthogonal au plan $\mathcal{P} : 2x - y + z + 1 = 0$ passant par $A(1, 1, 1)$. Un tel plan est-il unique ?

Définition 27.

On dit que deux plans de l'espace sont parallèles s'ils admettent des vecteurs normaux colinéaires. En d'autres termes, deux plans sont parallèles s'ils ont un vecteur normal commun.

Théorème 28.

L'intersection de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de l'espace est :

1. Soit un plan ($\mathcal{P} = \mathcal{P}'$). Dans ce cas, on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus (en particulier, ils sont parallèles).
2. Soit une droite. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants (leurs vecteurs normaux sont non colinéaires).
3. Soit l'ensemble vide. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles distincts.

Exemple 29

1. Déterminer l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ définis par $\mathcal{P} : x - 2y + z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}' : 2x + y - z - 3 = 0$. Préciser, si c'est une droite, un point et un vecteur directeur et en déduire un système d'équation paramétrique.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite de l'espace passant par $A(1, 2, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, 1)$. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$.

2.4 Projection orthogonale

Définition 30.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
Soit M un point de l'espace $\mathcal{E}$.
On appelle projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ l'unique point H de $\mathcal{E}$ tel que

$$\begin{cases} H \in \mathcal{P} \\ \overrightarrow{MH} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont colinéaires} \end{cases}$$

Exemple 31 Déterminer le projeté orthogonal de $A(0, 1, -2)$ sur $\mathcal{P} : x + y + z - 1 = 0$.

Définition 32.

Soient M un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.
On appelle distance de A à $\mathcal{P}$ la distance AH. On la note $\mathrm{d}(A,\mathcal{P})$.