Prénom :
Nom :

Interrogation n°11 : Systèmes linéaires et matrices **B**

1 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la définition de A est inversible.

2 2. Citer deux méthodes pour étudier l'inversibilité d'une matrice.

1,5 3. Pour une matrice de taille 2×2, citer la caractérisation de l'inversiblité. *(sans la démonstration).*

1,5 4. Citer la formule de binôme de Newton, avec les hypothèses.

5. **Exercice**

1,5 (a) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -y + 2t = 1 \\ 2x + 3y - z - 3t = 3 \\ 4x + 4y - z + 3t = -4 \end{cases}$$

1,5 (b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les puissances successives de A.

1 (c) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A.

1) A est inversible : $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AB = BA = I_n$.

2) Si le système $AX=B$ admet une unique solution, pour toute matrice colonne B, alors A est inversible.

On utilise l'algorithme de Gauss :

$A \qquad I_n$

on applique des opérations élémentaires pour obtenir

$I_n \qquad B$.

Alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

A est inversible ssi $ad - bc \neq 0$.

4) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec $AB = BA$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

5) ⓐ $(\Sigma) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} 2x+3y-z-3t=3 \\ -y \quad +2t=1 \\ 4x+4y-z+3t=-4 \end{cases}$

$\underset{L_3 \leftarrow L_3-2L_1}{\iff} \begin{cases} 2x+3y-z-3t=3 \\ -y \quad +2t=1 \\ -2y+z+9t=-10 \end{cases}$

$\underset{L_3 \leftarrow L_3-2L_2}{\iff} \begin{cases} 2x+3y-z-3t=3 \\ -y \quad +2t=1 \\ z+5t=-12 \end{cases}$ $\quad x=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}t$, $\quad y=2t-1$, $\quad z=-6-\frac{5}{2}t$

Le système est de rang 3 et $z=-12-5t$,

$y=2t-1$,

$x=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}(2t-1)+\frac{1}{2}(-12-5t)+\frac{3}{2}t$

$=-3-3t-\frac{5}{2}t+\frac{3}{2}t=-4t-3$

donc $\boxed{S=\{(-4t-3,\ 2t-1,\ -12-5t,\ t),\ t\in\mathbb{R}\}}$

ⓑ $A=I_2+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$. Posons $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.

I_2 et B commutent et $\forall n\geq 2,\ B^n=O_2$.

Par le binôme de Newton,

$\forall n\in\mathbb{N},\quad A^n=(I_2+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k I_2^{n-k}$

$=\sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}B^k=I_2+nB$.

donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad A^n=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}}$

ⓒ $\operatorname{rg}(A)\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-3&0\\0&1&2\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow 3L_3+L_2}{=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-3&0\\0&0&6\end{pmatrix}$

donc $\boxed{\operatorname{rg}(A)=3}$

Prénom :

Nom :

Interrogation $n°11$: Systèmes linéaires et matrices **A**

1 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la définition de A est inversible.

2 2. Citer deux méthodes pour étudier l'inversibilité d'une matrice.

1,5 3. Pour une matrice de taille 2×2, citer la caractérisation de l'inversiblité. *(sans la démonstration).*

1,5 4. Citer la formule de binôme de Newton, avec les hypothèses.

5. **Exercice**

1,5 (a) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y + 2t = 1 \\ 2x + 3y - z - 3t = 3 \\ 4x + 4y - z + 3t = -4 \end{cases}$$

1,5 (b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les puissances successives de A.

1 (c) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A.

5) a) $\Sigma \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} 2x+3y-z-3t=3 \\ y+2t=1 \\ 4x+4y-z+3t=-4 \end{cases}$

$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} 2x+3y-z-3t=3 \\ y+2t=1 \\ -2y+z+9t=-10 \end{cases}$

$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\iff} \begin{cases} 2x+3y-z-3t=3 \\ y+2t=1 \\ z+13t=-8 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}y + \frac{z}{2} + \frac{3}{2}t = -4 + \left(3 - \frac{13}{2} + \frac{3}{2}\right)t = -4-2t \\ y = 1-2t \\ z = -8-13t \end{cases}$

donc $\boxed{S = \{(-4-2t, 1-2t, -8-13t, t), t \in \mathbb{R}\}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ c) $rg(A) = 3$.