

Chapitre 17 : Polynômes réels

Table des matières

1	Polynômes, règles de calculs	2
1.1	Ensemble des polynômes	2
1.2	Opérations sur l'ensemble des polynômes	2
1.3	Identification	3
1.4	Règles de calculs	3
1.5	Degré d'un polynôme	4
1.6	Polynôme dérivé	4
2	Racines et Factorisation	5
2.1	Existence de racines	5
2.2	Factorisation	5
3	Racines multiples	6
3.1	Définition	6
3.2	Caractérisation	7

1 Polynômes, règles de calculs

1.1 Ensemble des polynômes

Définition 1.

On appelle fonction polynomiale une fonction f pour laquelle il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

On note $P = \sum_{k=0}^n a_k \mathbf{X}^k$ le polynôme associé à f .

On note $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} .

Définition 2.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

- P est le polynôme nul lorsque tous ces coefficients sont nuls.
 $P = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
- P est un polynôme constant lorsque $P = a_0$.
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_0$.
- P est un monôme s'il admet un seul terme.
 $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $P = a_k \mathbf{X}^k$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_k x^k$.

1.2 Opérations sur l'ensemble des polynômes

Remarque 3 Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

Pour un entier $m \geq n$, on peut écrire $P = \sum_{k=0}^m a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ en définissant $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_m = 0$.

Définition 4.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$. Soit $Q = \sum_{k=0}^m b_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

On appelle somme de P et de Q le polynôme noté $P+Q$ et défini par $P+Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) \mathbf{X}^k$.

Définition 5.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$. Soit $Q = \sum_{k=0}^m b_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On définit le polynôme $\lambda.P + \mu.Q$ par $\lambda.P + \mu.Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (\lambda.a_k + \mu.b_k) \mathbf{X}^k$.

On parle de une combinaison linéaire de P et de Q .

Définition 6.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$.

On définit le produit de P et de Q par $(PQ)(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X}) \cdot Q(\mathbf{X}) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k \mathbf{X}^k$.

Définition 7.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$.

On définit le composée de P par Q par $(Q \circ P)(\mathbf{X}) = Q[P(\mathbf{X})]$.

Exemple 8 On pose $P = 2\mathbf{X}^2 + 1$, $Q = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X} + 1$.
Déterminer $P + 3Q$, $P \cdot Q$, $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

1.3 Identification**Théorème 9 (Identification).**

Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coefficients.

Exemple 10 Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$. Soit f la fonction polynomiale associée.

1. Montrer que si f est une fonction paire alors les coefficients d'indice impair de P sont nuls.
2. Montrer que si f est une fonction impaire alors les coefficients d'indice pair de P sont nuls.

1.4 Règles de calculs**Théorème 11.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$(\mathbf{X} + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \mathbf{X}^k$$

$$\mathbf{X}^n - a^n = (\mathbf{X} - a) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \mathbf{X}^k \right)$$

Exemple 12 Développer $(\mathbf{X} - 1)^5$.

Exemple 13 Factoriser $\mathbf{X}^5 - 1$.

1.5 Degré d'un polynôme

Définition 14.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

On appelle degré de P le réel $\deg(P) = \max \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k \neq 0\}$.

Par convention, Le degré du polynôme nul vaut $-\infty$.

- Le coefficient $a_{\deg(P)}$ est appelé coefficient dominant de P .
- On dit qu'un polynôme est unitaire lorsque son coefficient dominant vaut 1.

Exemple 15 $P = \mathbf{X}^5$ est un monôme unitaire.

Exemple 16 Parmi les polynômes suivants :

$$A = \mathbf{X}^3 + 3\mathbf{X}^2 + 5\mathbf{X} + 2, B = 3\mathbf{X}^{10} + (2 + \mathbf{i})\mathbf{X}^5 + 3\mathbf{X}, C = \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} + 1, D = \mathbf{i}\mathbf{X}^5, E = 3, F = 0$$

- Quels sont ceux qui appartiennent à $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$?
- Quels sont ceux de degré 3 ?
- Quels sont ceux qui sont unitaires ?
- Quel est le terme dominant de B ? Quel est son coefficient dominant ?
Quel est son terme constant ?

Théorème 17.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$.

1. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.
2. Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$ alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$
3. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

Exemple 18 Déterminer deux polynômes P et Q tels que $\deg(P + Q) < \max(\deg(P), \deg(Q))$.

1.6 Polynôme dérivé

Définition 19.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k \mathbf{X}^k \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

On appelle polynôme dérivé de P le polynôme défini par

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k \mathbf{X}^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} \mathbf{X}^k$$

Remarque 20 La fonction polynomiale associée à P' est la dérivée de la fonction polynomiale associée à P .

Théorème 21.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

1. Si $\deg(P) \geq 1$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
2. Si $\deg(P) \leq 0$ alors $\deg(P') = -\infty$.

Théorème 22.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$. Soit $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$.

1. $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
2. $(PQ)' = P' \times Q + P \times Q'$.
3. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(Q^k)' = kQ'Q^{k-1}$.

Définition 23.

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$. On définit par récurrence les polynômes dérivés successifs de P par

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall m \in \mathbb{N}^*, P^{(m)} = (P^{(m-1)})' \end{cases}$$

Exemple 24 Déterminer les polynômes dérivés successifs de $P = 5\mathbf{X}^4 + \mathbf{X}^2 + 3$.

Exemple 25 Soit $P = a_0 + a_1\mathbf{X} + a_2\mathbf{X}^2 + a_3\mathbf{X}^3 \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

1. On suppose que $\deg(P) = 3$. Comment ceci se traduit-il sur les coefficients de P ?
2. Déterminer $P^{(3)}$.

2 Racines et Factorisation

2.1 Existence de racines

Définition 26.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que α est une racine de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Théorème 27.

Tout polynôme réel non nul de degré impair admet au moins une racine réelle.

2.2 Factorisation

Théorème 28.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :

1. α est une racine de P , c'est-à-dire $P(\alpha) = 0$.
2. Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ tel que $P = (\mathbf{X} - \alpha)Q$.

Exemple 29 Proposer une factorisation de $P = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 - 5\mathbf{X} + 3$.

Théorème 30.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ et soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ des racines **distinctes** de P .

$$\exists Q \in \mathbb{R}[\mathbf{X}], \quad P = \prod_{k=1}^s (\mathbf{X} - \alpha_k) \times Q$$

Exemple 31 Factoriser le polynôme $P = \mathbf{X}^4 - 1$.

Théorème 32.

1. Le nombre de racines distinctes d'un polynôme non nul est majoré par son degré.
2. Soit P un polynôme de degré n . Si P admet au moins $n + 1$ racines distinctes alors $P = 0$.
3. Si un polynôme admet une infinité de racines alors c'est le polynôme nul.

Exemple 33 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]^2$ de degré n . On suppose qu'il existe $n + 1$ valeurs deux à deux distinctes a_0, \dots, a_n telles que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = Q(a_i)$. Montrer que $P = Q$.

Théorème 34.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$, un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ les racines **distinctes** de P .

$$P = a_n \prod_{k=1}^n (\mathbf{X} - \alpha_k)$$

3 Racines multiples

3.1 Définition

Définition 35.

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $r \in \mathbb{N}$.
On dit que α est une racine de multiplicité r lorsque

$$\exists Q \in \mathbb{R}[\mathbf{X}] \text{ tel que } P = (\mathbf{X} - \alpha)^r Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0.$$

1. Pour $r = 1$, on parle de racine simple.
2. Pour $r = 2$, on parle de racine double.
3. Pour $r \geq 2$, on parle de racine multiple.

Remarque : La multiplicité d'une racine α d'un polynôme P est la plus grande puissance de $\mathbf{X} - \alpha$ qu'on peut mettre en facteur dans P .

Exemple 36 Déterminer les racines et les multiplicités des polynômes suivants.

1. $P = (\mathbf{X} + 2)(\mathbf{X} - 3)^2(\mathbf{X} + 1)^5$
2. $P = \mathbf{X}^5 - 2\mathbf{X}^4 + \mathbf{X}^3$

3.2 Caractérisation

Théorème 37.

Soient $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :

1. α est racine multiple de P
2. $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0$.

Exemple 38 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $P = 1 + \mathbf{X} + \frac{\mathbf{X}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{X}^n}{n!}$. Montrer que P n'a que des racines simples.

Théorème 39 (Hors-Programme).

Soient $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}] \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}$. On a équivalence entre :

1. α est racine de P de multiplicité r
2. $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0, \dots, P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Exemple 40 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Notons $P = n\mathbf{X}^{n+2} - (n+2)\mathbf{X}^{n+1} + (n+2)\mathbf{X} - n$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $P = (\mathbf{X} - 1)^3Q$ et $Q(1) \neq 0$.