

Prénom :

Nom :

Interrogation n°12 : Géométrie

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A .

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer tous les réels x tels que $\text{rg}(A - xI_2) < 2$.

(b) Déterminer toutes les matrices colonnes u telles que $Au = 3u$.

(c) Déterminer toutes les matrices colonnes u telles que $Au = -5u$.

3. Soient $P_1 : x - y + z = 2$ et $P_2 : x + 2y + 3z = 4$.

(a) Montrer que P_1 et P_2 ne sont pas parallèles et donner une représentation paramétrique de leur intersection notée d .

(b) Déterminer une équation cartésienne de P_3 le plan perpendiculaire à d et passant par $A(1, 0, -1)$.

(c) Déterminer les coordonnées du projeté de $A(1, 0, -1)$ sur le plan P_1 .

1) Le rang est conservé par opérations élémentaires

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{3}$$

2) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ $\text{rg}(A - xI_2) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1-x & 3 \\ 4 & -3-x \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1-x & 3 \\ 4 & -3-x \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow 4L_2 - (1-x)L_1} \text{rg} \begin{pmatrix} 1-x & 3 \\ 0 & 12 + (3+x)(1-x) \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1-x & 3 \\ 0 & -x^2 - 2x + 15 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or, } x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5)$$

$$\text{donc } \text{rg}(A - xI_2) < 2 \Leftrightarrow \boxed{x = 3 \text{ ou } x = -5}$$

(b) Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$Au = 3u \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 3x \\ 4x - 3y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 3y = 0$$

$$\text{donc } u \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{3}x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$Au = -5u \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y = -5x \\ 4x-3y = -5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+3y=0 \\ 4x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x+y=0.$$

$$u \in \{ (x, -2x), x \in \mathbb{R} \}.$$

3) a) Un vecteur normal à P_1 est $\vec{n}_1(1, -1, 1)$.

Un vecteur normal à P_2 est $\vec{n}_2(1, 2, 3)$.

$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires donc les plans sont sécants.

$$d: \begin{cases} x-y+z=2 \\ x+2y+3z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=2 \\ 3y+2z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-z+2 \\ y=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}t \\ y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) $\vec{u}(-5, -2, 3)$ est un vecteur directeur de d donc un vecteur normal à P_3 .

$$\Pi(x, y, z) \in P_3 \Leftrightarrow \vec{AP} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\Leftrightarrow -5(x-1) - 2y + 3(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -5x - 2y + 3z + 8 = 0$$

c) On cherche $H(x, y, z)$ tel que $\begin{cases} H \in P_1 \\ \vec{AH} \text{ et } \vec{n}_1 \text{ colinéaires} \end{cases}$

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} / \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{\lambda} + \cancel{\lambda} + \cancel{\lambda} + \cancel{\lambda} - \cancel{\lambda} = 2 \\ x = \lambda + 1 \\ y = -\lambda \\ z = \lambda - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \text{ donc } H\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$