Exercice 1 Soit $m \in \mathbb{R}$, $m \neq -3$, $m \neq 0$. Calculer la seconde racine des équations suivantes.

1. $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine.
   Correction On rappelle que dans une équation de la forme $ax^2 + bx + x = 0$, le produit des deux racines vaut $\frac{c}{a}$.
   Si on note y la seconde racine, alors $4y = \frac{8}{3}$ donc la seconde racine est $\frac{2}{3}$.
2. $mx^2 + (2m+1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine.
   Correction On rappelle que dans une équation de la forme $ax^2 + bx + x = 0$, le produit des deux racines vaut $\frac{c}{a}$.
   Si on note y la seconde racine, alors $-2y = \frac{2}{m}$ donc la seconde racine est $\frac{-1}{m}$.
3. $(m+3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine.
   Correction On rappelle que dans une équation de la forme $ax^2 + bx + x = 0$, le produit des deux racines vaut $\frac{c}{a}$.
   Si on note y la seconde racine, alors $my = \frac{2m^2}{m+3}$ donc la seconde racine est $\frac{2m}{m+3}$.

Exercice 2

1. Déterminer les solutions évidentes des équations suivantes
   (a) $x^2 - 6x + 9 = 0$.
   Correction $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ donc l'unique racines est 3.
   (b) $x^2 + 4x - 12 = 0$.
   Correction 2 est une racine évidente. Le produit des deux racines vaut -12 donc l'autre racine est -6.
2. En utilisant la relation coefficients-racines, résoudre les équations suivantes.
   (a) $x^2 - 13x + 42 = 0$.
   Correction On rappelle que dans une équation de la forme $ax^2 + bx + x = 0$, le produit des deux racines vaut $\frac{c}{a}$ et la somme vaut $\frac{-b}{a}$.
   Si x et y sont les racines alors $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 42 \end{cases}$ Donc, les racines sont 6 et 7.
   (b) $x^2 + 8x + 15 = 0$.
   Correction On rappelle que dans une équation de la forme $ax^2 + bx + x = 0$, le produit des deux racines vaut $\frac{c}{a}$ et la somme vaut $\frac{-b}{a}$.
   Si x et y sont les racines alors $\begin{cases} x + y = -8 \\ xy = 15 \end{cases}$ Donc, les racines sont -3 et -5.

Exercice 3 Pour les polynômes proposés, calculer PQ, $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

1. $P = 2\mathbf{X}^2 - 1$ et $Q = \mathbf{X}$.
   Correction $PQ = (2\mathbf{X}^2 - 1)\mathbf{X} = 2\mathbf{X}^3 - \mathbf{X}$.
   $P \circ Q = 2Q^2 - 1 = P = 2\mathbf{X}^2 - 1$ et $Q \circ P = P = 2\mathbf{X}^2 - 1$.
2. $P = \mathbf{X}^2 + 3$ et $Q = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X} + 1$.
   Correction $PQ = (\mathbf{X}^2+3)(\mathbf{X}^3+\mathbf{X}+1) = \mathbf{X}^5+\mathbf{X}^3+\mathbf{X}^2+3\mathbf{X}^3+3\mathbf{X}+3 = \mathbf{X}^5+4\mathbf{X}^3+\mathbf{X}^2+3\mathbf{X}+3$.
   $P \circ Q = Q^2 + 3 = (\mathbf{X}^3 + \mathbf{X} + 1)^2 + 3 = \mathbf{X}^6 + 2\mathbf{X}^4 + 2\mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4$.
   $Q \circ P = P^3 + P + 1 = (\mathbf{X}^2 + 3)^3 + \mathbf{X}^2 + 3 + 1 = \mathbf{X}^6 + 9\mathbf{X}^4 + 27\mathbf{X}^2 + 27 + \mathbf{X}^2 + 4$
   $= \mathbf{X}^6 + 9\mathbf{X}^4 + 28\mathbf{X}^2 + 31$.
3. $P = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} + 1$ et $Q = \mathbf{X} - 1$.
   Correction $PQ = (\mathbf{X}^3+\mathbf{X}^2+\mathbf{X}+1)(\mathbf{X}-1) = \mathbf{X}^4+\mathbf{X}^3+\mathbf{X}^2+\mathbf{X}-\mathbf{X}^3-\mathbf{X}^2-\mathbf{X}-1 = \mathbf{X}^4-1$.

$P \circ Q = Q^3 + Q^2 + Q + 1 = \mathbf{X}^3 - 3\mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} - 1 + \mathbf{X}^2 - 2\mathbf{X} + 1 + \mathbf{X} - 1 + 1 = \mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X}$.
$Q \circ P = P - 1 = \mathbf{X}^3 + \mathbf{X}^2 + \mathbf{X}$.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant des polynômes suivants :

$$P = (\mathbf{X}+1)^5 - \mathbf{X}^5,\ Q = (1-\mathbf{X}^3)^5 + (\mathbf{X}^5-1)^3,\ R = (\mathbf{X}-1)^n - (\mathbf{X}+1)^n.$$

Correction

- $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \mathbf{X}^k - \mathbf{X}^5 = \sum_{k=0}^{4} \binom{5}{k} \mathbf{X}^k$.
  P est de degré 4, son coefficient dominant est $\binom{5}{4} = 5$ et son coefficient constant est $\binom{5}{0} = 1$.
- $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (-\mathbf{X}^3)^k + \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (\mathbf{X}^5)^k (-1)^{3-k} = -\mathbf{X}^{15} + 5\mathbf{X}^{12} + \cdots + 1 + \mathbf{X}^{15} - 3\mathbf{X}^{10} + \cdots - 1$.
  Q est de degré 12, son coefficient dominant est 5 et son coefficient constant est 0.
- $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{X}^k (-1)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{X}^k = \mathbf{X}^n - n\mathbf{X}^{n-1} + \cdots + (-1)^n - \mathbf{X}^n - n\mathbf{X}^{n-1} - \cdots - 1$.
  R est de degré $n-1$, son coefficient dominant est $-2n$ et son coefficient constant est $(-1)^n - 1$.

Exercice 5

1. Proposer deux polynômes P et Q de degré 1 tels que

$$P(1) = 0,\ P(2) = 1,\ Q(2) = 0,\ Q(1) = 1$$

   Correction Voir la généralisation en dessous.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Proposer deux polynômes P_a et P_b de degré 1 tels que

$$P_a(a) = 1,\ P_a(b) = 0,\ P_b(a) = 0,\ P_b(b) = 1$$

   Correction P_a est un polynôme de degré au plus 1 : $\exists\ (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2\ /\ P = a_0 + a_1\mathbf{X}$.

$$\begin{cases} P_a(a) = 1 \\ P_a(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1.a = 1 \\ a_0 + a_1.b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1.(a-b) = 1 \\ a_0 = -a_1.b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{a-b} \\ a_0 = \dfrac{-b}{a-b} \end{cases}$$

   Donc, $P_a = \dfrac{-b}{a-b} + \dfrac{1}{a-b}\mathbf{X} = \dfrac{\mathbf{X}-b}{a-b}$.
   Avec le même raisonnement, on obtient $P_b = \dfrac{\mathbf{X}-a}{b-a}$.

Exercice 6 On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$P_0 = 1,\ P_1 = \mathbf{X} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2\mathbf{X}P_{n+1} - P_n$$

1. Déterminer P_2 et P_3.
2. Conjecturer, pour $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n et démontrer votre conjecture.
3. Conjecturer, pour $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de P_n et démontrer votre conjecture.

Correction

1. $P_2 = 2\mathbf{X}P_1 - P_0 = 2\mathbf{X}^2 - 1$.
   $P_3 = 2\mathbf{X}P_2 - P_1 = 2\mathbf{X}(2\mathbf{X}^2 - 1) - \mathbf{X} = 4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X} - 1$.
2. On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n$. On le démontre par récurrence **double**.
   I $\deg(P_0) = 0$ et $\deg(P_1) = 1$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
   H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies.
   $\deg(2\mathbf{X}P_{n+1}) = 1 + n + 1 = n + 2$ et $\deg(P_n) = n$.
   On a $\deg(2\mathbf{X}P_{n+1}) \neq \deg(P_n)$ donc $\deg(2\mathbf{X}P_{n+1} - P_n)$ $=\max(\deg(2\mathbf{X}P_{n+1}),\deg(P_n))$ $=\max(n+2, n) = n+2$.
   Donc, $\deg(P_{n+2}) = n + 2$ et $P(n+2)$ est vraie.
   C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n$.
3. On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 2^{n-1}$. On le démontre par récurrence .
   I $P_1 = \mathbf{X} = 2^{1-1}\mathbf{X}$ donc $P(1)$ est vraie.
   H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.
   Le coefficient dominant de P_{n+1} est celui de $2\mathbf{X}P_n$ donc il vaut $2.2^{n-1} = 2^n$. Donc, $P(n+1)$ est vraie.
   C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 2^{n-1}$.

Exercice 7 Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ tel que $P(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X}+1)$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = P(0)$.
2. En déduire que le polynôme $P - P(0)$ est le polynôme nul.
3. En déduire les valeurs possibles de P.

Correction

1. On le démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) : P(n) = P(0)$.
   I : Pour $n = 0$: $P(0) = P(0)$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   H : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.
   Par hypothèse sur P, $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(x+1)$. Donc, $P(n+1) = P(n) = P(0)$.
   Donc, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   C : Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) : P(n) = P(0)$.
2. Le polynôme $P - P(0)$ admet une infinité de racines donc c'est le polynôme nul.
3. On en déduit que $P = P(0)$. P est donc un polynôme constant.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère le polynôme $P = (\mathbf{X}+1)^{2n+1} - \mathbf{X}^{2n+1} - 1$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $P = (\mathbf{X}^2 + \mathbf{X})Q$.
2. Quel est le degré de Q ?
3. (-1) est-il racine double de P ?

Correction

1. On remarque que $\mathbf{X}^2 + \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{X}+1)$.
   Or, $P(0) = 1 - 1 = 0$ donc 0 est une racine de P.
   $P(-1) = -(-1)^{2n+1} - 1 = 0$ donc -1 est une racine de P.
   On a deux racines distinctes de P donc il existe un polynôme Q tel que $P = \mathbf{X}(\mathbf{X}+1)Q$.
2. Par les propriétés sur le degré, $\deg(P)$ $=\deg(\mathbf{X}(\mathbf{X}+1))+\deg(Q)$.
   Or, $\deg(P) = 2n$ donc $\deg(Q) = 2n - 2 = 2(n-1)$.

3. On utilise la caractérisation des racines doubles.
$P' = (2n+1)(\mathbf{X}+1)^{2n} - (2n+1)\mathbf{X}^{2n}$.
$P'(-1) = -(2n+1)(-1)^{2n} \neq 0$ donc -1 n'est pas une racine double de P.

Exercice 9 Soit $n \geq 2$. Soit $P = n\mathbf{X}^{n+2} - (4n+1)\mathbf{X}^{n+1} + 4(n+1)\mathbf{X}^n - 4\mathbf{X}^{n-1}$.

1. Justifier que 2 est une racine de P.
2. Déterminer sa multiplicité.

Correction

1. On remarque d'abord que $P = \mathbf{X}^{n-1}[n\mathbf{X}^3 - (4n+1)\mathbf{X}^2 + 4(n+1)\mathbf{X} - 4]$.
$P(2) = 2^{n-1}[8n - 4(4n+1) + 8(n+1) - 4] = 0$.
Donc, 2 est une racine de P.
2. On va utiliser les polynômes dérivés successifs.
   (a) $P' = (n-1)\mathbf{X}^{n-2}[n\mathbf{X}^3 - (4n+1)\mathbf{X}^2 + 4(n+1)\mathbf{X} - 4] + \mathbf{X}^{n-1}[3n\mathbf{X}^2 - 2(4n+1)\mathbf{X} + 4(n+1)]$.
   $P'(2) = 0 + 2^{n-1}[12n - 4(4n+1) + 4(n+1)] = 0$.
   Donc 2 est une racine de P de multiplicité au moins 2.
   (b) $P^{(2)} = (P')' = (n-1)(n-2)\mathbf{X}^{n-3}[n\mathbf{X}^3 - (4n+1)\mathbf{X}^2 + 4(n+1)\mathbf{X} - 4] + (n-1)\mathbf{X}^{n-2}[3n\mathbf{X}^2 - 2(4n+1)\mathbf{X} + 4(n+1)] + (n-1)\mathbf{X}^{n-2}[3n\mathbf{X}^2 - 2(4n+1)\mathbf{X} + 4(n+1)] + \mathbf{X}^{n-1}[6n\mathbf{X} - 2(4n+1)]$.
   $P^{(2)}(2) = 0 + 0 + 0 + 2^{n-1}[12n - 2(4n+1)] \neq 0$

   Donc 2 est une racine de P de multiplicité 2.

Exercice 10 [*] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (1+\mathbf{X})^{2n}$.

1. Développer P. En déduire le coefficient devant le monôme $\mathbf{X}^n$.
2. En écrivant $P = (1+\mathbf{X})^n.(1+\mathbf{X})^n$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Correction

1. Par la formule du binôme de Newton, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \mathbf{X}^k$. Le coefficient d'indice n est donc $\dbinom{2n}{n}$.
2. $(1+\mathbf{X})^n.(1+\mathbf{X})^n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{X}^k\right) . \left(\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \mathbf{X}^\ell\right) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{\ell} \mathbf{X}^{k+\ell} = \displaystyle\sum_{j=0}^{2n}\sum_{k=0}^{j} \binom{n}{k}\binom{n}{j-k} \mathbf{X}^j$.
où on a posé $j = k + \ell$. Le coefficient d'indice n est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
Par unicité des coefficients, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.