

Exercice 1 Etudier la monotonie des suites proposées.

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + u_n^2$.
2. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
3. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1$.

On pourra utiliser la fonction $g : x \mapsto e^x - 1 - x$.

Correction Pour étudier la monotonie d'une suite u , on peut s'intéresser au signe de $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1$.

On étudie alors le polynôme $P = X^2 - X + 1$. Son discriminant est négatif donc ce polynôme ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. De plus, $P(0) = 1$ donc $P > 0$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$$

La suite u est strictement croissante.

2. On doit d'abord montrer que la suite est bien définie.

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

On pourra donc toujours appliquer la formule de récurrence donc la suite u est bien définie.

Pour la monotonie, on fait également une récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : "u_{n+1} \geq u_n"$.

- La propriété est vraie au rang 0.
- Supposons qu'il existe un rang $n \geq 0$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{1 + u_{n+1}} - \sqrt{1 + u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{1 + u_{n+1}} + \sqrt{1 + u_n}} \underset{\text{HDR}}{\geq} 0$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

La suite u est donc décroissante.

3. Il n'y a pas de problème de définition puisque la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour la monotonie, on s'intéresse à la fonction $g(x) = e^x - 1 - x$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^x - 1$.

La fonction g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = e^x$.

On va pouvoir en déduire du signe de g'' le signe de g' .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	0	+	+
$g'(x)$	-1	0	$+\infty$

Puis on en déduit le signe de g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-1	-	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$. La suite u est croissante.

Exercice 2 Etudier la nature des suites proposées.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\cos(n)}{n+1}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n!}{n^n}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\lfloor na \rfloor}{n}$ pour $a \in \mathbb{R}$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\lfloor na \rfloor}{a}$ pour $a \in \mathbb{R}^*$.

Correction

1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} = \frac{3^n(\frac{2^n}{3^n} - 1)}{3^n(\frac{2^n}{3^n} + 1)} = \frac{\frac{2^n}{3^n} - 1}{\frac{2^n}{3^n} + 1} = \frac{(\frac{2}{3})^n - 1}{(\frac{2}{3})^n + 1}$$

La suite $((\frac{2}{3})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Par somme et quotient de suites convergentes, la suite u est convergente.

Par opération sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

2.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \frac{-1}{n+1} \leq \cos(n) \leq \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Les suites $(\frac{-1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\frac{1}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes et de même limite 0.

Par le théorème d'encadrement, la suite u est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_n &= \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times n}{n \times n \times \dots \times n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times 1 \\ &\leq \frac{1}{n} \times 1 \times \dots \times 1 \times 1 \\ \text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

La suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite 0.

Par le théorème d'encadrement, la suite u est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. On va minorer la suite par une suite qui diverge vers $+\infty$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} &\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \\ u_n &\geq \sqrt{n} \end{aligned}$$

La suite $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Par le théorème de minoration, la suite u diverge vers $+\infty$.

5.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}, \quad na - 1 &< \lfloor na \rfloor \leq na \\ \frac{na - 1}{n} &< \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \leq \frac{na}{n} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}, \quad a - \frac{1}{n} &< \frac{\lfloor na \rfloor}{n} \leq a \end{aligned}$$

La suite $\left(a - \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a . Par le théorème d'encadrement, la suite u converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

6.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}, \quad na - 1 &< \lfloor na \rfloor \leq na \\ \text{Si } a > 0, \quad \frac{na - 1}{a} &< \frac{\lfloor na \rfloor}{a} \leq \frac{na}{a} \\ \text{Si } a < 0, \quad \frac{na - 1}{a} &> \frac{\lfloor na \rfloor}{a} \geq \frac{na}{a} \end{aligned}$$

Les suites $\left(n - \frac{a}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.

Par le théorème de minoration, quelque soit le signe de a , la suite u diverge vers $+\infty$.

Exercice 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. C'est la *suite harmonique*.

1. Montrer que la suite H est croissante.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire que la suite n'est pas convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$$

La suite H est croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Supposons que la suite H converge.

Alors la suite extraite de rangs pairs $(H_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite.

Par passage à la limite dans l'inéquation de la question 2, on obtient : $0 \geq \frac{1}{2}$.

C'est absurde. On en déduit que H ne converge pas.

De plus, comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 4 [*] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. Que peut-on en conclure ?

Correction

1. On va vérifier les trois points de la définition.

- On étudie la monotonie de $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} < 0$$

Donc, la suite $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

- On étudie la monotonie de $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} > 0$$

Donc, la suite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- On étudie la limite de la différence.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = 0$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$.

Les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien adjacentes.

2. On en déduit qu'elles sont convergentes et qu'elles convergent vers la même limite.

On a du la suite extraite de rangs pairs $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la suite extraite de rangs impairs $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergent vers la même limite.

Donc, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 5 Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Soit $f : x \mapsto \frac{3x-1}{x+1}$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que l'intervalle $[1, 2]$ est stable par f , c'est-à-dire que $\forall x \in [1, 2], f(x) \in [1, 2]$.
4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $1 \leq u_n \leq 2$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
6. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Correction

1. $u_1 = \frac{3u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{5}{3}$. $u_2 = \frac{3u_1 - 1}{u_1 + 1} = \frac{4}{\frac{8}{3}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$. $u_3 = \frac{3u_2 - 1}{u_2 + 1} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.
Donc, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. $f(1) = 1$ et $f(2) = \frac{5}{3}$. Or, la fonction f est croissante sur $[1, 2]$ donc $\forall x \in [1, 2], 1 \leq f(x) \leq \frac{5}{3}$.
Donc, $[1, 2]$ est stable par f .
4. On raisonne par récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) : u_n$ existe et $1 \leq u_n \leq 2$.

I u_0 existe et $u_0 = 2$ donc $P(0)$ est vrai.

H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vrai.

$u_n \neq -1$ donc $f(u_n)$ existe. Donc, u_{n+1} existe.

De plus, par stabilité, $f(u_n) \in [1, 2]$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. Donc, $P(n+1)$ est vrai.

C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: u_n existe et $1 \leq u_n \leq 2$.

$$5. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}. u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 1} < 0.$$

Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

6. La suite est minorée et décroissante. Par le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons ℓ sa limite.

La fonction f est continue sur $[1, 2]$ donc $f(\ell) = \ell$.

Or, $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 3\ell - 1 = \ell(\ell + 1) \Leftrightarrow \ell = 1$.

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice 6 Déterminer des équivalents pour les suites proposées

$$1. \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n^2 + 3n - 6.$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4n^3 + 2n + \cos(n)$$

$$3. \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 3 + \frac{1}{n}$$

$$4. \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3}.$$

$$5. \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 10}.$$

$$6. \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n^2 + n + 1)^3$$

$$7. \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2024}$$

$$8. \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$9. \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n \sin\left(\frac{2}{n^2}\right)$$

$$10. \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}\right)$$

$$11. \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{3}{n^2}} - 1}$$

$$12. \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

Correction

$$1. u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n^2.$$

$$2. u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4n^3.$$

$$3. u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3.$$

$$4. \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{3}{n^2} \left(1 + \frac{5}{3n}\right) \text{ donc } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}.$$

$$5. \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{10}{n^2}} \text{ donc } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$$

$$6. n^2 + n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \text{ donc, par passage à la puissance, } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^6.$$

$$7. 1 + \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \text{ donc, par passage à la puissance, } u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1.$$

8. Attention, la puissance n'est pas constante donc la règle précédente ne s'applique pas.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.

Or, $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \cdot \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ donc, par composée de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$. Donc, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e$.

9. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$ donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \cdot \frac{2}{n^2}$ donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

10. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2} = \frac{n^2 + 2 - 1}{n^2 + 2} = 1 - \frac{1}{n^2 + 2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 2} = 0$ donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2 + 2}$ donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{n^2}$.

11. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ donc $e^{\frac{3}{n^2}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n^2}$.

Par quotient, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n^2}}$ donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{3}$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right)$.

Or, $n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \cdot \frac{2}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = 2$ donc, par composée de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$. Donc, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^2$.

Exercice 7 On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{1 + 3u_n}.$$

. On pose : $f : x \mapsto \frac{3}{1 + 3x}$.

1. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}_+$ et construire les premiers termes de la suite.
2. On pose $I = [0, 3]$. Montrer que I est stable par f
(c'est à dire que $f(I) \subset I$, ou encore $\forall x \in I, f(x) \in I$.)
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leq u_n \leq 3$.
4. Déterminer les points fixes de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}_+$ (c'est à dire les réels x vérifiant $f \circ f(x) = x$).
5. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de monotonies contraires.
6. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et préciser leurs limites.
7. En déduire la convergence de la suite (u_n) .

Correction

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \frac{-9}{(1 + 3x)^2} < 0$.
 Donc, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
 $u_1 = \frac{3}{1 + 3u_0} = \frac{3}{4}$, $u_2 = \frac{3}{1 + 3u_1} = \frac{12}{13}$ et $u_3 = \frac{3}{1 + 3u_2} = \frac{39}{49}$.
2. La fonction f est décroissante sur $[0, 3]$ donc $\forall x \in [0, 3], f(3) \leq f(x) \leq f(0)$.
 Donc, $\forall x \in [0, 3], 0 \leq \frac{3}{10} \leq f(x) \leq 3$.
 Donc, I est bien stable par f .
3. On raisonne par récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) : u_n$ existe et $0 \leq u_n \leq 3$.
I u_0 existe et $u_0 = 1$ donc $P(0)$ est vrai.

H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vrai.

$u_n \in \mathbb{R}_+$ donc $f(u_n)$ existe. Donc, u_{n+1} existe.

De plus, par stabilité, $f(u_n) \in [0, 3]$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 3$. Donc, $P(n+1)$ est vrai.

C Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) : u_n$ existe et $0 \leq u_n \leq 3$.

4. On doit d'abord justifier que la composée est possible. $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ donc $f \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, (f \circ f)(x) = f[f(x)] = \frac{3}{1+3f(x)} = \frac{3}{1+3\frac{3}{1+3x}} = \frac{3+9x}{10+3x}$$

$$\text{Donc, } (f \circ f)(\ell) = \ell \Leftrightarrow 3+9\ell = 10\ell+3\ell^2 \Leftrightarrow 3\ell^2+\ell-3=0 \Leftrightarrow \ell = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{6}.$$

5. On va raisonner par récurrence. $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) : "u_{2(n+1)} \leq u_{2n}"$.

I $u_0 = 1$ et $u_2 = \frac{12}{13} \leq u_0$ donc $P(0)$ est vrai.

H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vrai.

On a $u_{2(n+1)} \leq u_{2n}$. Par croissance de $f \circ f$, $(f \circ f)(u_{2(n+1)}) \leq (f \circ f)(u_{2n})$ donc $u_{2n+4} \leq u_{2n+2}$. Donc, $P(n+1)$ est vrai.

C On en déduit que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

On montre, de même, que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi décroissante.

6. Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont décroissantes et minorées. Par le théorème de la limite monotone, elles sont convergentes.

De plus, la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, les deux suites convergent vers un point fixe de $f \circ f$.

De plus, par passage à la limite dans l'encadrement de la question 3, on obtient que leur limite doit appartenir à $[0, 3]$. Finalement, seul $\ell = \frac{-1 + \sqrt{37}}{6}$ est possible donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = \frac{-1 + \sqrt{37}}{6}.$$

7. Puisque les deux suites extraites convergent vers la même limite, on en déduit que la suite u converge elle aussi vers cette limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{-1 + \sqrt{37}}{6}$.

Exercice 8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que f_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle à préciser.

(b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On la note x_n .

2. Déterminer x_1 et x_2 .

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq \frac{1}{2}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer $f_n(x_n)$ et $f_n(x_{n+1})$.

En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

5. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k - 1$.

(a) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puisque c'est une fonction polynomiale et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} > 0.$$

Donc, la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle est également continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème de la bijection, f_n est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans

$$[f_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)[= [-1, +\infty[.$$

- (b) $0 \in [-1, +\infty[$ donc 0 admet un unique antécédent par f_n dans $\mathbb{R}_+$. On a donc $f_n(x_n) = 0$.
2. $f_1 : x \mapsto x - 1$ donc $x_1 = 1$.
 $f_2 : x \mapsto x^2 + x - 1$ donc $x_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.
 Donc, $f_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq f_n(x_n)$. Par monotonie de la fonction f_n , on obtient $\frac{1}{2} \leq x_n$.
4. On a $f_n(x_n) = 0$ et $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.
 De plus, $f_n(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^n x_{n+1}^k - 1 = \sum_{k=1}^{n+1} x_{n+1}^k - x_{n+1}^{n+1} - 1 = f_{n+1}(x_{n+1}) - x_{n+1}^{n+1} = -x_{n+1}^{n+1} < 0$.
 Donc, $f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n)$. Par monotonie de la fonction f_n , on obtient $x_{n+1} \leq x_n$.
 Donc, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
5. La suite est décroissantes et minorée. Par le théorème de la limite monotone, elle converge.

Exercice 9 Déterminer des équivalents pour les suites proposées et en déduire leur limite .

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^3 + n \sin(n^{10} + n^7)}{n + \ln n}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2(\ln n)^4 - n^3(\ln n)^2 + (-1)^n n^2 e^{-n}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n + \sqrt{n} \ln n}{\sqrt{n} + 2}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(2n^{15}) + 15n^2$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 3n + 6}{n^2 + 1}\right)$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(3n^{10} + 1)$
7. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_n = \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right)$
8. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
9. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \exp(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) - 1$
10. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\ln(n^3 + 1)}{n^2 - n + 2}$
11. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^3 + n + 1}{n + \sqrt{n}} e^{-n}$
12. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^3 + 5n + 2}{3^n + 3(-1)^n}$
13. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^{2n} + 2^{3n}$
14. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^n + e^{2n} - \sqrt{e^n}$
15. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$
16. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(2 - e^{\frac{1}{n}})$
17. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln\left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1}\right)$
18. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{1 + e^{-n}} - 1}{e^{-2n}}$
19. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (2n)^{\frac{1}{n}} - 1$

20. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{\mathbf{e}^{\frac{1}{n}}} - 1$

Correction

- | | |
|--|--|
| 1. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2.$ | 11. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \mathbf{e}^{-n}.$ |
| 2. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n^3 \ln(n)^2.$ | 12. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^3}{3^n}.$ |
| 3. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}.$ | 13. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 9^n.$ |
| 4. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 15n^2.$ | 14. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mathbf{e}^{2n}.$ |
| 5. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n}.$ | 15. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1.$ |
| 6. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 10 \ln(n).$ | 16. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{n}.$ |
| 7. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$ | 17. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(2).$ |
| 8. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$ | 18. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\mathbf{e}^n}{2}.$ |
| 9. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}.$ | 19. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$ |
| 10. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3 \ln(n)}{n^2}.$ | 20. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$ |