

**Exercice 1** Etudier la monotonie des suites proposées.

1.  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 1 + u_n^2$ .
2.  $u_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ .
3.  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = e^{u_n} - 1$ .

On pourra utiliser la fonction  $g : x \mapsto e^x - 1 - x$ .

**Exercice 2** Etudier la nature des suites proposées.

1.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
2.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{\cos(n)}{n+1}$
3.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{n!}{n^n}$
4.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$
5.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{\lfloor na \rfloor}{n}$  pour  $a \in \mathbb{R}$ .
6.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{\lfloor na \rfloor}{a}$  pour  $a \in \mathbb{R}^*$ .

**Exercice 3** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . C'est la *suite harmonique*.

1. Montrer que la suite  $H$  est croissante.
2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ .
3. En déduire que la suite n'est pas convergente et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$ .

**Exercice 4** [\*] Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ .

1. Montrer que les suites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes.
2. Que peut-on en conclure ?

**Exercice 5** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}.$$

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
2. Soit  $f : x \mapsto \frac{3x - 1}{x + 1}$ . Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
3. Montrer que l'intervalle  $[1, 2]$  est stable par  $f$ , c'est-à-dire que  $\forall x \in [1, 2]$ ,  $f(x) \in [1, 2]$ .

4. Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $1 \leq u_n \leq 2$ .
5. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
6. En déduire que la suite est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 6** Déterminer des équivalents pour les suites proposées

1.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2n^2 + 3n - 6$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 4n^3 + 2n + \cos(n)$
3.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = 3 + \frac{1}{n}$
4.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3}$ .
5.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \sqrt{n^2 + 2n + 10}$ .
6.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = (n^2 + n + 1)^3$
7.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2024}$
8.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
9.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = n \sin\left(\frac{2}{n^2}\right)$
10.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \ln\left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 2}\right)$
11.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{3}{n^2}} - 1}$
12.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

**Exercice 7** On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3}{1 + 3u_n}.$$

. On pose :  $f : x \mapsto \frac{3}{1 + 3x}$ .

1. Tracer le graphe de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  et construire les premiers termes de la suite.
2. On pose  $I = [0, 3]$ . Montrer que  $I$  est stable par  $f$  (c'est à dire que  $f(I) \subset I$ , ou encore  $\forall x \in I, f(x) \in I$ ).
3. Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et  $0 \leq u_n \leq 3$ .
4. Déterminer les points fixes de  $f \circ f$  sur  $\mathbb{R}_+$  (c'est à dire les réels  $x$  vérifiant  $f \circ f(x) = x$ ).
5. Montrer que les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotones, de monotonies contraires.
6. Montrer que les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont convergentes et préciser leurs limites.
7. En déduire la convergence de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 8** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$ .

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - (a) Montrer que  $f_n$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans un intervalle à préciser.
  - (b) En déduire que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution. On la note  $x_n$ .
2. Déterminer  $x_1, x_2$  et  $x_3$ .
3. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq \frac{1}{2}$ .
4. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comparer  $f_n(x_n)$  et  $f_n(x_{n+1})$ .  
En déduire que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
5. En déduire que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Exercice 9** Déterminer des équivalents pour les suites proposées et en déduire leur limite .

1.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^3 + n \sin(n^{10} + n^7)}{n + \ln n}$
2.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2(\ln n)^4 - n^3(\ln n)^2 + (-1)^n n^2 e^{-n}$
3.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n + \sqrt{n} \ln n}{\sqrt{n+2}}$
4.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(2n^{15}) + 15n^2$

5.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln \left( \frac{n^2 + 3n + 6}{n^2 + 1} \right)$
6.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(3n^{10} + 1)$
7.  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_n = \ln \left( \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} \right)$
8.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^2 \ln \left( 1 + \sin \left( \frac{1}{n} \right) \right)$
9.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \exp(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) - 1$
10.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\ln(n^3 + 1)}{n^2 - n + 2}$
11.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^3 + n + 1}{n + \sqrt{n}} e^{-n}$
12.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n^3 + 5n + 2}{3^n + 3(-1)^n}$
13.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^{2n} + 2^{3n}$
14.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^n + e^{2n} - \sqrt{e^n}$
15.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$
16.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(2 - e^{\frac{1}{n}})$
17.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln \left( \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n + 1} \right)$
18.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{1 + e^{-n}} - 1}{e^{-2n}}$
19.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (2n)^{\frac{1}{n}} - 1$
20.  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{e^{\frac{1}{n}}} - 1$