Chapitre 18 : Suites réelles

Table des matières

1 Ensemble des suites	2
1.1 Définitions	2
1.2 Opérations sur l'ensemble des suites	2
2 Suites bornées et suites monotones	2
2.1 Suites bornées	2
2.2 Suites monotones	3
3 Limite d'une suite	3
3.1 Limite finie	3
3.2 Limite infinie	4
3.3 Opérations sur les limites	4
3.4 Croissances comparées	5
3.5 Limites et inégalités	6
3.6 Suites extraites	6
3.7 Suites adjacentes	7
4 Suites récurrentes	8
4.1 Définition de la suite	8
4.2 Représentation d'une telle suite	8
4.3 Etude de la monotonie	8
4.4 Lorsqu'elle existe, valeur de la limite	8
5 Suites équivalentes	9
5.1 Définition	9
5.2 Opérations sur les équivalents	9
5.3 Equivalents usuels	10

1 Ensemble des suites

1.1 Définitions

Définition 1.

On appelle suite réelle toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

On note souvent une suite sous la forme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Notation : u_n est le terme général de la suite, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ correspond à la suite et $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} = u(\mathbb{N})$ est l'ensemble des valeurs prises par la suite u .

1.2 Opérations sur l'ensemble des suites

Définition 2.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- On définit la suite somme $u + v$ par $\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)_n = u_n + v_n$.
- On définit la suite $\lambda.u$ par $\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda.u)_n = \lambda \times u_n$.
- On définit la suite produit $u.v$ par $\forall n \in \mathbb{N}, (u.v)_n = u_n \times v_n$.

L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est stable par chacune de ces opérations.

Exemple 3 Proposer deux suites non nulles dont le produit donne la suite nulle.

2 Suites bornées et suites monotones

2.1 Suites bornées

Définition 4.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la suite u est minorée lorsque : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.
- On dit que la suite u est majorée lorsque : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- On dit que la suite u est bornée lorsqu'elle est minorée et majorée :
 $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.

Exemple 5 La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée. La suite $(n^2 - 4)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite minorée.

Exemple 6 A quelle condition une suite géométrique est-elle bornée ?

Exemple 7 Montrer que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\cos(n)}{2^n}$ est bornée.

Théorème 8.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

La suite u est bornée si, et seulement si, la suite $|u|$ est majorée.

Théorème 9.

La somme ou le produit de deux suites bornées est encore une suite bornée.

Exemple 10 Montrer que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(n) - \sin(5n)$ est bornée.

2.2 Suites monotones**Définition 11.**

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que la suite u est croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- On dit que la suite u est décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- On dit que la suite u est constante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.

Exemple 12 Etudier la monotonie de la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n}$.

Méthode 1.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour étudier la monotonie de u ,

- On étudie, à n fixé, le signe de la quantité $u_{n+1} - u_n$.
- Si la suite est non nulle, on compare, à n fixé, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- S'il existe une fonction f telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, on étudie la monotonie de f et la suite u a la même.

Exemple 13 Déterminer la monotonie de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n+1}{n+2}$.

3 Limite d'une suite**3.1 Limite finie****Définition 14.**

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que la suite u admet une limite finie ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. On dit que la suite converge vers ℓ .

Remarque 15

- A partir du rang n_0 , les termes de la suite sont dans l'intervalle $[\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$.
- Le rang n_0 dépend de ε . Plus ε est petit, plus n_0 est grand.

Théorème 16.

1. Si une suite admet une limite finie alors cette limite est unique.
2. Si une suite converge alors elle est bornée.
3. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, la suite $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3.2 Limite infinie**Définition 17.**

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On dit que la suite u admet une limite infinie $+\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A)$$

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. On dit que la suite diverge.

Définition 18.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On dit que la suite u admet une limite infinie $-\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq A)$$

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$. On dit que la suite diverge.

3.3 Opérations sur les limites**Théorème 19.**

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Ce tableau donne la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$.

	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$-\infty$	ℓ'	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$				
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Forme Ind.
	ℓ	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
	$+\infty$	Forme Ind.	$+\infty$	$+\infty$

Exemple 20 Déterminer la limite de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n - n^2$.

Exemple 21 Déterminer la limite de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^n - n^2$.

Théorème 22.

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Ce tableau donne la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Forme Ind.	$-\infty$	$-\infty$
$\ell < 0$	$+\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$-\infty$
0	Forme Ind.	0	0	0	Forme Ind.
$\ell > 0$	$-\infty$	$\ell \times \ell'$	0	$\ell \times \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Forme Ind.	$+\infty$	$+\infty$

Exemple 23 Déterminer la nature de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n}$.

Théorème 24.

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.
Ce tableau donne la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \backslash \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$-\infty$	$\ell' < 0$	0^-	0^+	$\ell' > 0$	$+\infty$
$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$\ell < 0$	0^+	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0^-
0^-	0^+	0^+	F.I.	F.I.	0^-	0^-
0^+	0^+	0^-	F.I.	F.I.	0^+	0^+
$\ell > 0$	0^-	$\frac{\ell}{\ell'}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0^+
$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.

Exemple 25 Déterminer la nature de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n^3 - 5n + 1}{n^3 + 6n^2 + 8}$.

Exemple 26 Déterminer la nature de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+1}$.

3.4 Croissances comparées**Théorème 27.**

Soit $a \in \mathbb{R}, a > 1$. Soit $b \in \mathbb{R}^*$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$$

3.5 Limites et inégalités

Théorème 28.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles **convergentes**.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > 0$ alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > 0$.
2. Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 0$.
3. Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > v_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Exemple 29 Soit u une suite convergente de limite 1. Justifier, qu'à partir d'un certain rang, la suite est minorée par $\frac{1}{2}$.

Théorème 30.

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > v_n$.

1. Si v diverge vers $+\infty$ alors u diverge vers $+\infty$.
2. Si u diverge vers $-\infty$ alors v diverge vers $-\infty$.

Remarque 31 Pour déterminer la limite d'une suite, on pourra donc penser à la majorer ou à la minorer par une suite de limite connue.

Théorème 32 (Théorème d'encadrement).

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > v_n > w_n.$$

Si les suites u et w **convergent vers la même limite finie ℓ** alors la suite v converge vers ℓ .

Théorème 33 (Théorème de la limite monotone, admis.).

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Si u est croissante et majorée alors elle converge.
2. Si u est croissante et non majorée alors elle diverge vers $+\infty$.
3. Si u est décroissante et minorée alors elle converge.
4. Si u est décroissante et non minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

Exemple 34 Déterminer la nature de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+1}{n+2}$.

3.6 Suites extraites

Théorème 35.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle **convergente**, de limite ℓ .

1. La suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite ℓ .
2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

Définition 36.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On appelle suite extraite de rangs pairs la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n}$.

On appelle suite extraite de rangs impairs la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{2n+1}$.

Théorème 37.

Soit u une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1. La suite u converge vers ℓ (resp. $-\infty$ ou $+\infty$) si, et seulement si, les suites extraites de rangs pairs et de rangs impairs convergent vers ℓ (resp. $-\infty$ ou $+\infty$).
2. Si les suites extraites de rangs pairs et de rangs impairs ne convergent pas vers la même limite alors la suite u est divergente.

3.7 Suites adjacentes**Définition 38.**

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On dit que ces suites sont adjacentes lorsque :

1. la suite u est croissante,
2. la suite v est décroissante et
3. la suite $v - u$ converge vers 0.

Exemple 39 Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

Exemple 40 Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+n} \text{ et } v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

Théorème 41.

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites adjacentes (avec u croissante et v décroissante).

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
2. les suites u et v convergent et ont la même limite ℓ .
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1} \leq \ell \leq v_{n+1} \leq v_n$

4 Suites récurrentes

4.1 Définition de la suite

Définition 42.

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur D_f .

On appelle suite récurrente la suite u définie par $\begin{cases} u_0 \in D_f \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Exemple 43 La suite u définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{u_n - 1} \end{cases}$ existe-t-elle?

Methode 2.

Pour montrer qu'une telle suite est bien définie :

- Si f est définie sur $\mathbb{R}$, la suite est bien définie.
- Si f est définie sur $D \neq \mathbb{R}$, on montre par récurrence que la suite u est à valeurs dans D .

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : "u_n \in D"$$

4.2 Représentation d'une telle suite

4.3 Etude de la monotonie

Methode 3.

On étudie la monotonie de la fonction f .

- Si la fonction f est croissante sur I ,
 - Si $u_0 \leq u_1$ alors on montre par récurrence que u est croissante.
 - Si $u_1 \leq u_0$ alors on montre par récurrence que u est décroissante.
- Si la fonction f est décroissante sur I alors $f \circ f$ est croissante sur I donc on étudie les suites extraites de rangs pairs et impairs (toujours par récurrence).

Remarque 44 Si, de plus la suite est bornée, on peut appliquer le théorème de la limite monotone.

4.4 Lorsqu'elle existe, valeur de la limite

Théorème 45 (Théorème du point fixe, admis.).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ converge vers } \ell \in I \\ f \text{ est continue sur } I, \end{cases}$ alors ℓ vérifie : $\ell = f(\ell)$

Remarque 46 Les solutions de l'équation $x = f(x)$ sont les seules limites possibles de la suite u .

Exemple 47 Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n + 1) \end{cases}$

1. Montrer que pour tout entier n , u_n existe et $u_n \geq 0$.
2. Étudier la monotonie sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto \ln(x + 2)$.
3. En déduire la monotonie de la suite u .
4. Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

5 Suites équivalentes

5.1 Définition

Définition 48.

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles avec la suite v non nulle à partir d'un certain rang n_0 .

On dit que la suite u est équivalente la suite v lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

On lit " u_n est équivalent de v_n en $+\infty$ " et on note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Exemple 49

- $n^5 + 3n^3 - 7 \underset{+\infty}{\sim} n^5$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{X}]$ de degré d alors $P(n) \underset{+\infty}{\sim} a_d n^d$.
- Lorsqu'une suite u converge vers $\ell \neq 0$, on peut écrire $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$.

Théorème 50.

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si v converge vers ℓ alors u converge aussi vers ℓ .

5.2 Opérations sur les équivalents

Théorème 51.

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $u' = (u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v' = (v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quatre suites numériques non nulles à partir d'un certain rang.

1. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $u'_n \underset{+\infty}{\sim} v'_n$ alors $u_n \times u'_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \times v'_n$.
2. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\frac{1}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$.
3. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

Exemple 52 Déterminer un équivalent simple de la suite définie par $\forall n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$.

Exemple 53 Déterminer un équivalent simple de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\ln(n) + n}{n + \sqrt{n}}$.

5.3 Equivalents usuels

Théorème 54.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite non nulle à partir d'un certain rang telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$\cos(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \quad \sin(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n \quad \tan(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n \quad e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n \quad \ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$$

$$\cos(u_n) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2} \quad \sqrt{1 + u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$$

Exemple 55 Déterminer la limite de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.