

Exercice 1 Déterminer les limites suivantes

1. $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$ en $+\infty$.
2. $f(x) = \frac{x^5-x}{x^2-1}$ en $+\infty$.
3. $f(x) = e^x - 2x + 1$ en $+\infty$.
4. $f(x) = 3xe^{-x^2}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}$ en $+\infty$.
7. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0.
8. $f(x) = \cos(5x)e^{-3x}$ en $+\infty$.
9. $f(x) = \frac{\sin(2x)}{5x}$ en 0.
10. $f(x) = \frac{x \sin(x)}{x^2+1}$ en $+\infty$.
11. $f(x) = e^{x-\sin(x)}$ en $+\infty$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{x+5}{x^2+1} = \frac{x(1+\frac{5}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1+\frac{5}{x}}{x(1+\frac{1}{x^2})}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{x^5-x}{x^2-1} = x^3 \cdot \frac{1-\frac{1}{x^4}}{1-\frac{1}{x^2}}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $e^x - 2x + 1 = e^x \left(1 - 2\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)$.
Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $3xe^{-x^2} = 3 \cdot \frac{-x^2 e^{-x^2}}{-x}$.
Or, $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 e^{-x^2} = 0$. Par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
6. Il s'agit d'une forme indéterminée $+\infty - (+\infty)$ où les deux termes tendent vers $+\infty$ avec la même vitesse. Aucune mise en facteur ne conviendra. On multiplie par la partie conjuguée.
$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{1+x} - \sqrt{x-1} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}} = \frac{(x+1) - (x-1)}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x-1}}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x} + \sqrt{x-1} = +\infty$. Par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}) = 0$.
7. On applique la même méthode.
$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = 2$. Par quotient, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = 1$.
8. On utilise un encadrement de la fonction cosinus.
 $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |\cos(5x)| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos(5x)e^{-3x}| \leq e^{-3x}$.
Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} = 0$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(5x)e^{-3x} = 0$.
9. $\frac{\sin(2x)}{5x} = \frac{2}{5} \times \frac{\sin(2x)}{2x}$. Or, $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1$. Donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$.
Par produit, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{5x} = \frac{2}{5}$.
10. On va utiliser un encadrement de sin. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |\sin(x)| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left| \frac{x \sin(x)}{x^2+1} \right| \leq \frac{|x|}{x^2+1}$.
Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$. Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2+1} = 0$.
11. $\forall x \in \mathbb{R}, x-1 \leq x - \sin(x) \Rightarrow e^{x-1} \leq e^{x-\sin(x)}$ par croissante sur \mathbb{R} de la fonction exponentielle.
Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$. Par minoration, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-\sin(x)} = +\infty$.

Exercice 2 *Limites et parties entières*

1. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x[x]$.
Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Correction

1. On va utiliser la caractérisation de la partie entière : $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < [x] \leq x$.
Pour $x > 0$, cela donne $x(x - 1) < x[x] \leq x^2$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - 1) = +\infty$.

Par minoration, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x[x] = +\infty}$.

Pour $x < 0$, cela donne $x(x - 1) > x[x] \geq x^2$. Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

Par minoration, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} x[x] = +\infty}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$. Or, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - x = 1$.

Par encadrement, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1}$.

Soit $x > 1$. $0 \leq \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$. Donc, la fonction f est nulle sur $]1; +\infty[$. D'où, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0}$.

Exercice 3 *Limites et fonction sinus*

1. Montrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Montrer que la fonction f n'admet pas de limite en 0.
3. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Déterminer la limite de f en 0.

Correction

1. Nous allons proposer deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tendent vers $+\infty$ et telles que $(\sin(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tendent pas vers la même limite.

Prenons $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2\pi n$ et $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \sin(x_n) = 0$ et $\sin(y_n) = 1$.

Or, si la fonction sinus admet une limite en $+\infty$, les deux suites $(\sin(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ devraient tendre vers cette limite. Donc, sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

2. On fait de même en prenant les suites définies par $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{1}{2\pi n}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$.

3. Il faut montrer que la fonction f a une limite finie en 0. On prendra cette valeur pour définir le prolongement.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1 \Rightarrow \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|.$$

Par encadrement, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$.

Exercice 4 [*] Montrer que la fonction \tan n'admet pas de limite en $+\infty$.

Correction On raisonne par l'absurde. Notons $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan(x)$.

D'une part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tan\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = 1$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = 1$ (suite constante).

D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} + n\pi = +\infty$ donc puisque f admet une limite en $+\infty$, par composée de limite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \ell$$

Par unicité de la limite, $1 = \ell$.

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tan(n\pi) = 0$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(n\pi) = 0$ (suite constante).

D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\pi = +\infty$ donc puisque f admet une limite en $+\infty$, par composée de limite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan(n\pi) = \ell.$$

Par unicité de la limite, $0 = \ell$.

C'est absurde donc \tan n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 5 Étudier les limites suivantes. Dans beaucoup de cas, il pourra être intéressant de faire un calcul d'équivalent.

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{x^3 + x + 52}{4x^3 - 30x^2}$ en $+\infty$ | 9. $2x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$ |
| 2. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^n - 1}$ en $1 (n \in \mathbb{N}^*)$ | 10. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$ |
| 3. $\frac{\sin(x \ln x)}{x}$ en 0 | 11. $x \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ en $+\infty$ |
| 4. $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$ en 1 | 12. $\ln(3x^2 + 2x) - \ln(2x^2 + 3x)$ en $+\infty$ |
| 5. $x^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$ | 13. $(1 - e^x) \ln x$ en 0 . |
| 6. x^x en 0 | 14. $\frac{\sin(x) - \cos(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$ en $\frac{\pi}{4}$ |
| 7. $\sqrt{x^2 + 2x} - x$ en $+\infty$ | 15. $\frac{\sin(3x)}{\sqrt{1 - 2\cos(x)}}$ en $\frac{\pi}{3}$ |
| 8. $\frac{\tan(3x)}{\sin(2x)}$ en 0 | |

Correction

1. $\frac{x^3 + x + 52}{4x^3 - 30x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^3}{4x^3}$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x + 52}{4x^3 - 30x^2} = \frac{1}{4}}$.

2. C'est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. On va factoriser par $x - 1$.

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^n - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k} = \frac{x - 2}{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}$$

Donc, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^n - 1} = \frac{-1}{n}}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ donc, par substitution dans les équivalents, $\sin(x \ln(x)) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} x \ln(x)$.

Par quotient, $\frac{\sin(x \ln x)}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x)$.

Or, deux fonctions équivalentes ont la même limite donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x \ln x)}{x} = -\infty}$.

4. $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{x + 2}{x - 3}$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-3}{2}}$.

5. $x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ donc, par composée de limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

6. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^x = e^{x \ln(x)}$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ et $e^0 = 1$. Par composition, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$.

7. Soit $x > 1$. $\sqrt{x^2 + 2x} - x = x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1 \right)$.

Or, $\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{2x}$ donc, par produit d'équivalents, $\sqrt{x^2 + 2x} - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x = 1$.

8. Par quotient d'équivalent, $\frac{\tan(3x)}{\sin(2x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3}{2}$.

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc, par substitution dans les équivalents, $\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$. Par produit, $2x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x}$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

10. Soit $x > 1$. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$.

Par produit d'équivalent, $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.

Par composée de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par substitution dans les équivalents, $1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$.

Par produit, $x \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$.

12. Soit $x > 1$.

$$\ln(3x^2 + 2x) - \ln(2x^2 + 3x) = \ln\left(\frac{3x^2 + 2x}{2x^2 + 3x}\right)$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x}{2x^2 + 3x} = \frac{3}{2}$ donc, par composée de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(3x^2 + 2x) - \ln(2x^2 + 3x) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

13. Par produit d'équivalents, $(1 - e^x) \ln x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x \ln(x)$.

Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) \ln x = 0$.

14. Posons $y = x - \frac{\pi}{4}$.

$$\frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right)}{y} = \frac{\cos(y) \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(y) \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos(y) \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(y) \frac{\sqrt{2}}{2}}{y} = \frac{\sqrt{2} \sin(y)}{y}$$

Or, $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$.

15. Posons $y = x - \frac{\pi}{3}$.

$$\frac{\sin 3x}{\sqrt{1 - 2 \cos x}} = \frac{\sin(3y + \pi)}{\sqrt{1 - 2 \cos\left(y + \frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{-\sin(3y)}{\sqrt{1 - \cos(y) + \sqrt{3} \sin(y)}} = \frac{-\sin(3y)}{\sqrt{y} \sqrt{\frac{1 - \cos(y)}{y} + \sqrt{3} \frac{\sin(y)}{y}}}$$

$$\text{Or, } \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(y)}{y} + \sqrt{3} \frac{\sin(y)}{y} \right) = \sqrt{3} \text{ donc } \frac{-\sin(3y)}{\sqrt{y} \sqrt{\frac{1 - \cos(y)}{y} + \sqrt{3} \frac{\sin(y)}{y}}} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} \frac{-3y}{\sqrt{\sqrt{3}y}}.$$

$$\text{Finalement, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1 - 2 \cos x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-3y}{\sqrt{\sqrt{3}y}} = 0.$$

Exercice 6 Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au point indiqué.

1. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ en $+\infty$ et en 0.
2. $x^2 + x + 2 \ln(x)$ en 0 et en $+\infty$.
3. $e^x + x^2$ en 0 et en $+\infty$.
4. $\ln(1 + \sin(x))$ en 0.
5. $\ln(\cos(x))$ en 0.
6. $\ln(\sin(x))$ en $\frac{\pi}{2}$.

Correction

1. Soit $x > 0$. $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} \cdot (1 + e^{-2x})$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$ donc $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 \text{ donc } \frac{e^x + e^{-x}}{2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1.$$

2. En 0 :
 $\frac{x^2 + x + 2 \ln(x)}{2 \ln(x)} = \frac{x^2}{2 \ln(x)} + \frac{x}{2 \ln(x)} + 1$. Or, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \ln(x)} + \frac{x}{2 \ln(x)} = 0$ donc $x^2 + x + 2 \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2 \ln(x)$.

En $+\infty$:
 $\frac{x^2 + x + 2 \ln(x)}{x^2} = 1 + \frac{2 \ln(x)}{x^2} + \frac{2 \ln(x)}{x^2}$. Or, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x)}{x^2} + \frac{2 \ln(x)}{x^2} = 0$
 donc $x^2 + x + 2 \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.

3. En $+\infty$:
 $\frac{e^x + x^2}{e^x} = 1 + \frac{x^2}{e^x}$. Or, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ donc $e^x + x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$.

En 0 :
 $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + x^2 = 1$ donc $e^x + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$ donc $\ln(1 + \sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin(x)$.
 De plus, $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. Donc, par transitivité, $\ln(1 + \sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

5. $\ln(\cos(x)) = \ln(1 + \cos(x) - 1)$. Or, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) - 1 = 0$ donc $\ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \cos(x) - 1$. De plus,
 $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. Par transitivité, $\ln(\cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

6. On pose $y = \frac{\pi}{2} - x$ pour se ramener en 0.
 $\ln(\sin(x)) = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right) = \ln(\cos(y))$.
 Or, $\ln(\cos(y)) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} -\frac{y^2}{2}$.

$$\text{Donc, } \ln(\sin(x)) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}{2}.$$