Exercice 1 Déterminer un équivalent puis un développement limité en 0 aux ordres $1, 2, 3$ et 4 de :

1. $x \mapsto \sqrt{\pi}$
2. $x \mapsto x^3 + x + 1$
3. $x \mapsto x^5 + 2x^4 + 3x + 3$
4. $x \mapsto x^3 + x^4(\mathrm{e}^x - 1)$

Correction

1. $\sqrt{\pi} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\pi}$ et $\sqrt{\pi} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{\pi} + o(x) \underset{x\to 0}{=} \sqrt{\pi} + o(x^2) \underset{x\to 0}{=} \sqrt{\pi} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} \sqrt{\pi} + o(x^4)$.
2. $x^3 + x + 1 \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $x^3 + x + 1 \underset{x\to 0}{=} x + 1 + o(x) \underset{x\to 0}{=} x + 1 + o(x^2) \underset{x\to 0}{=} x^3 + x + 1 + o(x^3)$ $\underset{x\to 0}{=} x^3 + x + 1 + o(x^4)$.
3. $x^5+2x^4+3x+3 \underset{x\to 0}{\sim} 3$ et $x^5+2x^4+3x+3 \underset{x\to 0}{=} 3x+3+o(x) \underset{x\to 0}{=} 3x+3+o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 3x+3+o(x^3)$ $\underset{x\to 0}{=} 2x^4 + 3x + 3 + o(x^4)$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} x(\mathrm{e}^x - 1) = 0$ donc $x^3 + x^4(e^x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$.
   Donc, $x^3 + x^4(\mathrm{e}^x - 1) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} o(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2) \underset{x\to 0}{=} x^3 + o(x^4)$.

Exercice 2 Déterminer les développements limités à l'ordre indiqué en $x = 0$.

1. $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ à l'ordre 3.
2. $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}\ln(1+x)$ à l'ordre 4.
3. $h(x) = \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)$ à l'ordre 5.
4. $k(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ à l'ordre 4. Montrer que $k(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^4)$.

Correction

1. $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ donc $\boxed{x\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)}$.
2. $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o\left(x^6\right)$ donc $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + o\left(x^5\right)$.
   $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$.
   Par produit,
   $$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{x}\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o\left(x^5\right)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} + \frac{163}{360}x^5 + o\left(x^5\right).\end{aligned}$$
3. $\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln(1+x^2) - \ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \dfrac{x^4}{2} + o\left(x^5\right) - \left(-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)\right)$
   donc, $\boxed{\ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)}$
4. $\dfrac{k(x)}{x^4} = \dfrac{1}{x^4}\exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = \dfrac{X^2}{\mathrm{e}^X}$ avec $X \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{x^2}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X^2}{\mathrm{e}^X} = 0$.
   Par composition de limites, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k(x)}{x^4} = 0$. Donc, $\boxed{k(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^4)}$.

Exercice 3 Calculer les limites en 0, lorsqu'elles existent, des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}$
2. $x \mapsto \dfrac{\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}-1}{x}$
3. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+2x}-\cos x-\sin x}{x^3}$

Correction

1. $\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} -1+o(1)$.
   Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2}=-1}$.
2. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1+\dfrac{x}{2}+o(x)-1+\dfrac{x}{2}+o(x)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1+o(1)$ donc il faut un développement limité à l'ordre suivant.
   $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+o(x^2)-1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+o(x^2)}{x} \underset{x\to 0}{=} 1+o(x)$.
   Donc, $\dfrac{\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}-1}{x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1+o(x)-1}{x} \underset{x\to 0}{=} o(1)$. Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}-1}{x}=0}$.
3. On va proposer des développements limités à l'ordre 3 en 0 de chacune des fonctions présentes au numérateur.
   $\sqrt{1+2x} \underset{x\to 0}{=} 1+\dfrac{2x}{2}-\dfrac{(2x)^2}{8}+\dfrac{(2x)^3}{16}+o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1+x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)$.
   $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$.
   $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$.
   Donc, $\dfrac{\sqrt{1+2x}-\cos x-\sin x}{x^3} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1+x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{2}-1+\dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{2}{3}+o(1)$.
   Finalement, $\boxed{\dfrac{\sqrt{1+2x}-\cos x-\sin x}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{3}}$.

Exercice 4 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$
2. $x \mapsto \sin(3x)-3\sin x$
3. $x \mapsto \ln(2+x)$
4. $x \mapsto \sqrt{2+3x}$
5. $x \mapsto \ln(\cos x)$
6. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+\cos x}$
7. $x \mapsto \dfrac{1}{3+\sin(x)}$
8. $x \mapsto \dfrac{e^x}{\cos x}$
9. $x \mapsto e^{\sin x}-e^x$

Correction

1. $\sin(x)\cos(2x) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{13}{6}x^3+o(x^3)$.
2. $\sin(3x)-3\sin x \underset{x\to 0}{=} -4x^3+o(x^3)$.
3. $\ln(2+x) \underset{x\to 0}{=} \ln 2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{24}+o(x^3)$.
4. $\sqrt{2+3x} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}\left[1+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{9}{32}x^2+\dfrac{27}{128}x^3\right]+o(x^3)$.

5. $\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$.
6. $\dfrac{1}{e^x+\cos x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{5}{48}x^3 + o(x^3)$.
7. $\dfrac{1}{3+\sin x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{9} + \dfrac{x^2}{27} + \dfrac{x^3}{162} + o(x^3)$.
8. $\dfrac{e^x}{\cos x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.
9. $e^{\sin x} - e^x \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Exercice 5 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathbf{e}^{\sin(x)} \end{cases}$

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe en $x = 0$.
2. Etudier la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Correction

1. $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$ donc on peut substituer x par $\sin(x)$ dans le développement limité en 0 de exp.

$$\mathbf{e}^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \sin(x) + \frac{(\sin(x))^2}{2} + o\Big((\sin(x))^2\Big)$$

On s'occupe ensuite de chaque terme séparément.

$$\begin{aligned}
(\sin(x))^2 &\underset{x\to 0}{\sim} x^2 \text{ donc } o\Big((\sin(x))^2\Big) \underset{x\to 0}{=} o\Big(x^2\Big)\\
\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x + o\Big(x^2\Big)\\
(\sin(x))^2 &\underset{x\to 0}{=} x^2 + o\Big(x^2\Big)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbf{e}^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\Big(x^2\Big) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\Big(x^2\Big)$$

La tangente à la courbe est donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y = 1 + x}$.

2. Le signe de $f(x) - (1+x)$ nous permet de déterminer la position de la droite par rapport à la courbe.
On a $f(x) - (1+x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2}{2} + o\Big(x^2\Big)$ donc $f(x) - (x+1) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$ donc $f(x) - (1+x) > 0$ au voisinage de 0.
Donc, $\boxed{\text{La courbe est au dessus de la tangente en 0}}$.

Exercice 6

1. Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$ en $x = 0$.
2. Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$ en $x = 0$.

Correction

1. $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} - \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} - 1\right)$.

Posons $u(x) = -\dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$.

$\lim_{x\to 0} u(x) = 0$ donc on va pouvoir utiliser la substitution.
$\frac{1}{1-u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + u(x) + o(u(x))$.
Or, $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{6}$ donc $o(u(x)) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$.
Donc, $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)} - 1\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)-1\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{6} + o(x)$
Finalement, $\boxed{\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{6}}$.

2. Commençons par $\sin^2(x)$ à l'ordre 4 en 0.
$\sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 + \frac{x^6}{36} + o(x^3)^2 - \frac{x^4}{3} + 2x\,o(x^3) - \frac{x^3}{2}\,o(x^3) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$
Donc, $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)} - 1\right)$.
Posons alors $u(x) = \frac{x^2}{3} + o(x^2)$.
$\lim_{x\to 0} u(x) = 0$ donc on va pouvoir utiliser la substitution.
$\frac{1}{1-u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + u(x) + o(u(x))$.
Or, $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{3}$ donc $o(u(x)) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$.
Donc, $\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)} - 1\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)-1) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3} + o(1)$.
Finalement, $\boxed{\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}}$.

Exercice 7 Déterminer les développements limités au point et à l'ordre indiqués.

1. $f(x) = \ln(2+\sin(x))$ en $x=0$ à l'ordre 3.
2. $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ en $x=0$ à l'ordre 2.

Correction

1. $f(x) = \ln(2+\sin(x)) = \ln\left(2(1+\frac{\sin(x)}{2})\right) = \ln(2) + \ln(1+\frac{\sin(x)}{2}) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \ln(1+\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right))$
$\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$ où $u(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)$.

$$\begin{aligned} u(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right) \\ u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4} \\ u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{8} \\ o\left(u^3\right) &\underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Donc, $f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right)$.

2. $h(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) \underset{x\to 0}{=} \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \mathbf{e}.(1 + u + \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right))$ où $u(x) = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)$

$$\begin{array}{rcl} u(x) & \underset{x\to 0}{=} & -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right) \\ u(x)^2 & \underset{x\to 0}{=} & \frac{x^2}{4} \\ o\left(u^2\right) & \underset{x\to 0}{=} & o\left(x^2\right) \end{array}$$

Donc, $h(x) \underset{x\to 0}{=} \mathbf{e}.(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)) \underset{x\to 0}{=} \mathbf{e} - \frac{\mathbf{e}x}{2} + \frac{11\mathbf{e}x^2}{24} + o\left(x^2\right)$.

Exercice 8 [$*$] Soit $f : x \mapsto x^2(e^x - 1)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$.
2. Montrer que f ne possède pas de développement limité à l'ordre 3 en 0.
   On raisonnera par l'absurde.

Correction

1. On va étudier $\frac{f(x)}{x^2} = (e^x - 1)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
   $0 \leq \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \left|(\mathbf{e}^x - 1)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |(\mathbf{e}^x - 1)|$.
   Or, $\lim_{x\to 0} |(\mathbf{e}^x - 1)| = 0$ donc, par le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to 0} \left|(\mathbf{e}^x - 1)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0$.
   On en déduit que $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^2)}$.
2. On raisonne par l'absurde et on suppose que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 3.
   Donc, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{x\to 0}{=} ax^3 + o(x^3)$.
   Donc, $\frac{f(x)}{x^3} \underset{x\to 0}{=} a + o(1)$. Donc, $g : x \to \frac{f(x)}{x^3}$ admet une limite finie en 0.
   On va montrer que c'est absurde.
   Prenons $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{1}{2\pi n}$ et $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Ces deux suites convergent vers 0.
   $\forall n \in \mathbb{N},\ g(x_n) = \frac{\mathbf{e}^{x_n} - 1}{x_n}\cos(2\pi n) = \frac{\mathbf{e}^{x_n} - 1}{x_n}$ et $g(yn) = \frac{\mathbf{e}^{y_n} - 1}{y_n}\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0$.
   Donc, $\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} g(y_n) = 0$.
   Donc, il est absurde de supposer que la fonction g admette une limite finie en 0.
   Donc, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'admet pas de développement limité à l'ordre 3 en 0.}}$