

Prénom :

Nom :

Interrogation n°14 : Limites de fonctions **B**

15 1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Ecrire avec des quantificateurs que

(a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

1 2. Enoncer le théorème de minoration pour des fonctions.

1 3. Donner la définition de deux fonctions équivalentes en 0.

2 4. Enoncer les équivalents usuels en 0.

2 5. Compléter le tableau suivant :

	Vrai	Faux
$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.	X	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.		X
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = 0$.	X	
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.		X

6. Exercices

1,5 (a) Déterminer la limite suivante $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right)$.

1, - (b) Montrer que la fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0^+ .

6) @ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \sim \frac{1}{x}$.

donc $x \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) \sim 1$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) = 1$

⑥ $\forall n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{1}{2\pi n}$ et $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{u_n}\right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{v_n}\right) = 0$

$1 \neq 0$ donc $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0^+

1) (a) $\forall A > 0 \exists \eta > 0 / \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A$

(b) $\forall A < 0 \exists B < 0 / \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A$

(c) $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 / \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow |f(x) - 3| \leq \varepsilon$

2) Soient deux fonctions f et g telles que $f \leq g$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$

3) $f(x) \sim g(x) : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

4) $\sin(x) \sim x$ $\tan(x) \sim x$

$\cos(x) \sim 1$ $\ln(1+x) \sim x$

$\cos(x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$

$e^x - 1 \sim x$