Chapitre 21 : Probabilités sur un univers fini (prof)

Table des matières

1 Univers et événements liés à une expérience aléatoire

1.1 Expériences aléatoires et univers

Définition 1.

On appelle expérience aléatoire toute expérience physique ou de pensée dont le résultat peut varier lorsqu'on la répète.
On appelle univers d'une expérience aléatoire, noté Ω, l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience. On parle aussi d'issues ou de réalisations de l'expérience.

Exemple 2

- On lance un dé à 6 faces et on note le nombre obtenu. Il y a 6 issues possibles et $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- On choisit au hasard un nombre entre 1 et 100. Il y a 100 issues possibles et $\Omega = [\![1, 100]\!]$.
- On pioche deux boules successivement dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires. Il y a 4 issues possibles et $\Omega = \{BB, BN, NB, NN\} = \{B, N\}^2$.
- On lance quatre fois une pièce de monnaie. $\Omega = \{P, F\}^4$.
- Une urne contient 20 jetons numérotés de 1 à 20. On tire successivement 5 jetons de l'urne. Quel est l'univers à considérer dans le cas :
  - d'un tirage sans remise ? Ω est l'ensemble des 5−listes sans répétition de $[\![1, 20]\!]$.
  - d'un tirage avec remise ? Ω est l'ensemble des 5−listes (avec répétition possible) de $[\![1, 20]\!]$.

Remarque 3 On travaillera avec des univers finis donc pas de lancers de dés répétés indéfiniment par exemple.

1.2 Evénements

Définition 4.

Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire.

- On appelle événement toute partie de l'univers Ω.
- On appelle événement élémentaire tout singleton compris dans l'univers Ω.
- On appelle événement certain l'événement Ω.
- On appelle événement impossible l'événement $\varnothing$.

Exemple 5 Lorsqu'on lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, l'événement « obtenir un résultat pair » se notera également $\{2, 4, 6\}$.

Remarque 6 Le choix de l'univers ne dépend que de l'expérience aléatoire réalisée.
Lorsqu'on lance deux dés à 6 faces, $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$.

Définition 7.

Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire. Soient A et B deux événements.

- On appelle événement contraire de A l'événement $\overline{A} = \mathcal{C}_\Omega(A)$.
- On appelle événement A et B l'événement $A \cap B$.
- On appelle événement A ou B l'événement $A \cup B$.
- On dit que A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Exemple 8 Pour un événement A, les événements A et $\overline{A}$ sont toujours incompatibles.

Définition 9.

Soit Ω l'univers lié à une expérience aléatoire. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille finie d'événements.
On dit que la famille forme un système complet d'événement (SCE) lorsque

- leur union forme l'univers tout entier : $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
- ils sont incompatibles deux à deux : $\forall\ (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.

Exemple 10

- Lorsqu'on lance un dé à 6 faces, les événements « le résultat est pair » et « le résultat est impairs » forment un SCE.
- Plus généralement, pour tout événement A, $(A, \overline{A})$ forme un système complet d'événement.
- Pour $\Omega = \{w_1, \ldots, w_n\}$, la famille $(\{w_i\}\ ,\ i \in [\![1, n]\!])$ forme un système complet d'événement.

Exemple 11 On lance deux fois une pièce de monnaie. Proposer un système complet d'événement.
(FF, FP, Pf, PP) est un système complet d'événements.

2 Espaces probabilisés

2.1 Probabilités et premier exemple

Définition 12.

Soit Ω un univers fini. On appelle probabilité sur Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

- $P(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$
- $P(\Omega) = 1$
- $\forall\ (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. (additivité)

Le couple (Ω, P) est appelé un espace probabilisé fini.

Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, le réel $P(A)$ est appelé probabilité de l'événement A.

Exemple 13 Soit P une probabilité sur un univers fini Ω. Montrer que $P(\varnothing) = 0$.

$\Omega \cap \varnothing = \varnothing$ donc $P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$. Donc, $P(\varnothing) = 0$.

Théorème 14.

Soit Ω un univers fini non vide.
La fonction $P : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} \end{cases}$ est une probabilité sur Ω.

Définition 15.

Soit Ω un univers fini.
La probabilité précédente est appelée probabilité uniforme sur Ω.

Remarque 16 On munit l'univers de la probabilité uniforme dans les cas suivants :

- lancer d'un dé non pipé,
- Lancer d'une pièce équilibrée,
- Tirage au hasard d'un jeton dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.

Exemple 17 On lance 5 fois une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois pile ?

Remarque 18

- Soit P la probabilité uniforme sur Ω. Soit $w \in \Omega$. $P(\{w\}) = \dfrac{1}{|\Omega|}$.
- Lorsque l'on travaille avec la probabilité uniforme sur Ω, le calcul de probabilité se ramène à du dénombrement (pour déterminer des cardinaux).

2.2 Propriétés des probabilités

Théorème 19.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $A = \{w_1, \ldots, w_p\}$ une partie de Ω.

1. $P(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} P(\{w_k\})$.
2. $\displaystyle\sum_{w \in \Omega} P(\{w\}) = 1$.

Remarque 20 Une probabilité est entièrement définie par les probabilités des évènements élémentaires $(P(\{\omega\})_{w \in \Omega})$.

Théorème 21.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\varnothing) = 0$.
3. $\forall\, (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
4. $\forall\, (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. Pour $A_1, \ldots, A_n$ des événements deux à deux incompatibles, $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
6. Pour $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événement alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Théorème 22.

Soit $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$ un univers fini. Soit $(p_1, \dots, p_n) \in [0;1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
Il existe une unique probabilité P sur Ω telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(\{w_i\}) = p_i$.

Cette probabilité est donnée par $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ w_i \in A}} p_i$.

2.3 Formule des probabilités totales

Théorème 23.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements.

$$\forall\, B \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

3 Probabilité conditionnelle

3.1 Définition

Théorème 24.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) > 0$.
La fonction $P_B : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{cases}$ est une probabilité sur Ω.

Définition 25.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) > 0$.
La fonction P_B définie précédemment est appelée probabilité conditionnelle sachant B.
Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on note $P_B(A)$ ou $P(A|B)$.

Remarque 26 La notation P_B définie une probabilité qui dépend de B et de P.

Exemple 27 On s'intéresse à une famille de deux enfants avec une équiprobabilité pour le sexe des enfants.

1. Quelle est la probabilité d'avoir deux filles ?
   4 issues équiprobables GF, FF, GG, FG donc $P(FF) = \frac{1}{4}$.
2. Quelle est la probabilité d'avoir deux filles sachant que l'ainé est une fille ?
   $P(FF|F\bullet) = \dfrac{P(FF \cap F\bullet)}{P(F\bullet)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$
3. Quelle est la probabilité d'avoir deux filles sachant qu'il y a au moins une fille ?
   On appelle A l'événement "au moins une fille". On a $P(A) = \frac{3}{4}$.
   $P(FF|A) = \dfrac{P(FF \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{3}$.

Théorème 28.

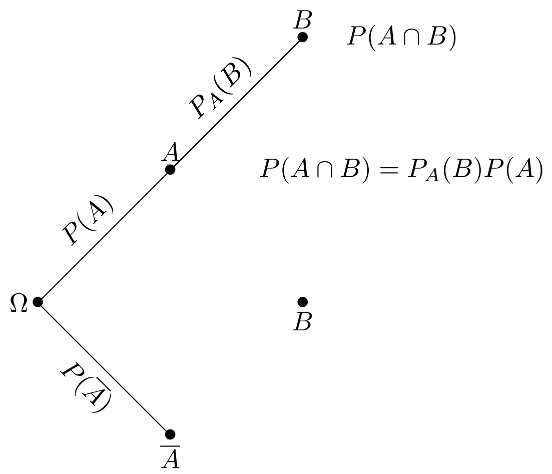
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements avec $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$.

$$P(A \cap B) = P(A).P_A(B) = P(B).P_B(A).$$

3.2 Arbre de probabilité

On peut représenter une situation aléatoire par un arbre de probabilité.

- On part de l'événement certain Ω.
- A partir d'un sommet, on représente un SCE. La somme des probabilité au départ de chaque sommet vaut 1.
- Sur la branche reliant A à B, on représente la probabilité conditionnelle $P_A(B)$.
- La probabilité d'un chemin complet s'obtient par le produit des probabilités de chaque branche du chemin.



3.3 Retour sur la formule des probabilités totales

Théorème 29.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $(A, \overline{A})$ un système complet d'événements avec $P(A) > 0$ et $P(\overline{A}) > 0$.

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$

Exemple 30 On considère deux urnes.
La première urne A contient 2 jetons blancs et 2 jetons rouges.
La deuxième urne B contient 7 jetons blancs et 1 jeton rouge.
On choisit au hasard une des deux urnes et on tire au hasard un jeton dans cette urne.
Quelle est la probabilité que ce jeton soit blanc ?

On note U_A l'événement "on choisit l'urne A". On note U_B l'événement "on choisit l'urne B".
On note B l'événement "on pioche un jeton blanc.
Les événements (U_A, U_B) forment un système complet d'événements. Donc, par la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(B|U_A)P(U_A) + P(B|U_B)P(U_B) = \frac{2}{4}.\frac{1}{2} + \frac{7}{8}.\frac{1}{2} = \frac{11}{16}$$

Théorème 31.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(A_i) > 0$. Alors,

$$\forall\ B \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

Exemple 32 On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires.
On effectue 3 tirages successifs sans remise dans cette urne. On travaille avec la probabilité uniforme.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage.
2. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au troisième tirage.

On note B_i l'événement "tirer une boule blanche au $i-$ème tirage".
On note N_i l'événement "tirer une boule blanche au $i-$ème tirage".

1. Les événements (B_1, N_1) forme un système complet d'événement. Par la formule des probabilités totales,
$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|N_1)P(N_1) = \frac{3}{6}.\frac{4}{7} + \frac{4}{6}.\frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$
2. Les événements $(B_1 \cap B_2, B_1 \cap N_2, N_1 \cap B_2, N_1 \cap N_2)$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{array}{rcl}
P(B_3) & = & P(B_3|B_1 \cap B_2)P(B_1 \cap B_2) + P(B_3|B_1 \cap N_2)P(B_1 \cap N_2) \\
& + & P(B_3|N_1 \cap B_2)P(N_1 \cap B_2) + P(B_3|N_1 \cap N_2)P(N_1 \cap N_2) \\
& = & P(B_3|B_1 \cap B_2)P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_3|B_1 \cap N_2)P(N_2|B_1)P(B_1) \\
& + & P(B_3|N_1 \cap B_2)P(B_2|N_1)P(N_1) + P(B_3|N_1 \cap N_2)P(N_2|N_1)P(N_1) \\
& = & \frac{2}{5}.\frac{3}{6}.\frac{4}{7} + \frac{3}{5}.\frac{3}{6}.\frac{4}{7} + \frac{3}{5}.\frac{4}{6}.\frac{3}{7} + \frac{1}{5}.\frac{2}{6}.\frac{3}{7} \\
& = & \frac{24 + 36 + 36 + 6}{210} = \frac{102}{210} = \frac{17}{35}
\end{array}$$

Remarque 33 on utilise la formule des probabilités totales quand l'expérience aléatoire se déroule en plusieurs étapes, que chaque étape conditionne le résultat de la suivante, et que l'on cherche la probabilité d'être dans un état donné à l'issue de plusieurs étapes.

3.4 Formule des probabilités composées

Théorème 34.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'événements telle que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors,

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Exemple 35 On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On effectue 3 tirages successifs sans remise dans cette urne.
Calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches puis une boule noire.

$$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(N_3|B_1 \cap B_2) = \frac{4}{7}.\frac{3}{6}.\frac{2}{5} = \frac{4}{35}$$

Remarque 36 La condition $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ autorise à définir toutes les probabilités conditionnelles.

3.5 Formules de Bayes

Théorème 37.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A})}$$

Exemple 38 On considère une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires. On effectue 3 tirages successifs sans remise dans cette urne.
Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage sachant que la deuxième boule obtenue est noire.

$$P(B_1|N_2) = \frac{P(N_2|B_1)P(B_1)}{P(N_2)} = \frac{P(N_2|B_1)P(B_1)}{P(N_2|B_1)P(B_1) + P(N_2|N_1)P(N_1)} = \frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{7} + \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{7}} = \frac{2}{3}$$

Théorème 39.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(A_i) > 0$. Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) > 0$.

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!],\ P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Remarque 40 La formule de Bayes s'utilise pour "remonter aux causes".
Connaissant le résultat final d'une expérience aléatoire, elle donne la probabilité d'avoir été dans une certaine situation antérieurement.

4 Evénements indépendants

4.1 Définition

Définition 41.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$.
On dit que A et B sont des événements indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarque 42

- A ne pas confondre avec événements incompatibles.
- L'indépendance dépend de la probabilité P utilisée sur Ω.

4.2 Propriétés

Théorème 43.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ deux événements indépendants.
1. A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. $\overline{A}$ et B sont indépendants.
3. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Théorème 44.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$.
1. Si $P(B) = 0$ alors A et B sont indépendants.
2. Si $P(B) > 0$ alors A et B sont indépendants si, et seulement si, $P_B(A) = P(A)$.

Exemple 45 On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit les évènements suivants :
A : "On obtient un chiffre pair"
B : "On obtient un chiffre supérieur ou égal à 2"
C : "On obtient un chiffre supérieur ou égal à 3".
1. Quel est l'univers Ω à considérer ? Quelle probabilité met-on sur Ω ?
   $\Omega = [\![1, 6]\!]$ et on travaille avec la probabilité uniforme.
2. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ? $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{5}{6}$ et donc $P(A).P(B) = \frac{5}{12}$.
   $P(A \cap B) = \frac{3}{6}$ donc $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$. Donc, A et B ne sont pas indépendants.
   $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et donc $P(A).P(C) = \frac{1}{3}$.
   $P(A \cap C) = \frac{3}{6}$ donc $P(A \cap C) = P(A)P(B)$. Donc, A et C sont indépendants.

4.3 Famille finie d'événements

Définition 46.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$.
On dit que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux indépendants lorsque

$$\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Définition 47.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$.
On dit que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants lorsque

$$\forall\, I \subset [\![1, n]\!],\ P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Exemple 48 Soient A_1, A_2 et A_3 trois événements d'un espace probabilisé (Ω, P).
- ils sont indépendants deux à deux lorsque

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2),\quad P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3),\quad \text{et } P(A_3 \cap A_1) = P(A_3)P(A_1).$$

- ils sont mutuellement indépendants lorsque

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2),\ \ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2)P(A_3),\ \ P(A_3 \cap A_1) = P(A_3)P(A_1) \text{ et} \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3). \end{aligned}$$

Théorème 49.

1. L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.
2. La réciproque est fausse lorsqu'il y a plus de 3 événements.

Exemple 50 On lance deux fois une pièce équilibrée. On définit les évènements :
A_1 : "le premier lancer donne pile"
A_2 : "l'un des deux lancers donne pile, l'autre donne face"
A_3 : "Le deuxième lancer donne face".
Montrer que A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

$P(A_1) = \frac{1}{2}$. $P(A_2) = \frac{1}{2}$.
$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2)$ donc A_1 et A_2 sont indépendants.
$P(A_1) = \frac{1}{2}$. $P(A_3) = \frac{1}{2}$.
$P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_3)$ donc A_1 et A_3 sont indépendants.
$P(A_3) = \frac{1}{2}$. $P(A_2) = \frac{1}{2}$.
$P(A_3 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_3)P(A_2)$ donc A_3 et A_2 sont indépendants.
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$ et $P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8} \neq P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ donc les trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.