

Prénom :

Interrogation n°15 : Limites de fonctions et DL A

Nom :

0,5 1. Que pouvez dire de  $f$  si  $f(x) = o(x) + o(x^2)$ ?  $f(x) = o(x)$

6,5 2. Remplir le tableau suivant avec des développements limités demandés.

|                       |                                                                                                                     |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0,5 $\frac{1}{1-x} =$ | $\sum_{k=0}^n x^k + o(x^{n+1})$                                                                                     |
| 0,5 $\frac{1}{1+x} =$ | $\sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^{n+1})$                                                                              |
| 0,5 $\ln(1+x) =$      | $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$                                                              |
| 0,5 $e^x =$           | $\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^{n+1})$                                                                          |
| 1 $(1+x)^\alpha =$    | $1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$ |
| 0,5 $\sqrt{1+x} =$    | $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$                                                         |
| 1 $\cos(x) =$         | $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$                                                            |
| 1 $\sin(x) =$         | $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$                                                        |
| 1 $\tan(x) =$         | $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$                                                                     |

## 3. Exercices

2 (a) Déterminer la limite en 0 de  $x \mapsto \frac{\sqrt{1+2x} - \cos(x) - \sin(x)}{x^3} = f(x)$

1 (b) Déterminer le développement limité à l'ordre 0 en 0 de  $x \mapsto \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2}$ .

$$3) \textcircled{a} \sqrt{1+2x} = 1 + \frac{2x}{2} - \frac{(2x)^2}{8} + \frac{(2x)^3}{16} + o(x^3)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\text{donc } f(x) = \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - 1 + \frac{x^2}{2} - x + \frac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{x^3}{x^3} + o(1) = 1 + o(1)$$

$$= \frac{2}{3} + o(1) \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \cos(x) - \sin(x)}{x^3} = \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{b} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + (-x) - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2}$$

$$= -1 + o(1).$$

$x \rightarrow 0$