BCPST 1.1 & 1.2

Corrigé du devoir surveillé n° 6

— 9 mars 2024—

Exercice 1 - Calculs.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$ et $\sin y \underset{0}{\sim} y$ donc par substitution, $\sin(e^{-3x}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-3x}$.

   Puis, par produit des équivalents, $\boxed{x\sin(e^{-3x}) \underset{+\infty}{\sim} xe^{-3x}}$.

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-3x} = 0$ par croissances comparées. $\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(e^{-3x}) = 0}$.

2. Au voisinage de $+\infty$,
$$\begin{aligned}\ln(1+x^2)-\sqrt{x} &= \ln(x^2(1+1/x^2)-\sqrt{x} = 2\ln x + \ln(1+1/x^2) - \sqrt{x} \\ &= -\sqrt{x}\left[1 - 2\underbrace{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}_{*} - \underbrace{\frac{\ln(1+1/x^2)}{\sqrt{x}}}_{**}\right]\end{aligned}$$

   (*) le quotient tend vers 0 par croissances comparées.
   (**) le quotient tend vers 0 par quotient des limites.

   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1 - 2\underbrace{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}_{*} - \underbrace{\frac{\ln(1+1/x^2)}{\sqrt{x}}}_{**}\right] = 1$. On en déduit $\boxed{\ln(1+x^2)-\sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt{x}}$.

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2)-\sqrt{x} = -\infty}$.

3. Par opérations usuelles sur les développements limités, on trouve $\boxed{\sqrt{1+2x}-\cos(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}$.

   Donc $\sqrt{1+2x}-\cos(x) - x \underset{0}{=} \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. Ce développement limité est non-nul, on en déduit un équivalent : $\sqrt{1+2x}-\cos(x) - x \underset{0}{\sim} \frac{x^3}{2}$. Donc, par quotient des équivalents, $\dfrac{\sqrt{1+2x}-\cos(x)-x}{x^3} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$. On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-\cos(x)-x}{x^3} = \dfrac{1}{2}}$.

4. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sin(x)\ln(1+2x)$.
   Par opérations usuelles sur les développements limités, on trouve $\boxed{\sin(x)\ln(1+2x) \underset{0}{=} 2x^2 - 2x^3 + o(x^3)}$.

   Donc $\sin(x)\ln(1+2x) - 2x^2 \underset{0}{=} -2x^3 + o(x^3)$. Ce développement limité est non-nul, on en déduit un équivalent : $\sin(x)\ln(1+2x) - 2x^2 \underset{0}{\sim} -2x^3$. Donc, par quotient des équivalents, $\dfrac{\sin(x)\ln(1+2x)-2x^2}{x^3} \underset{0}{\sim} -2$. On en déduit $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)\ln(1+2x)-2x^2}{x^3} = -2}$.

Exercice 2 - Étude d'une suite récurrente

1. **Informatique**

   (a)

```python
def suite(n):
    u = 1/2
    for i in range(1,n+1):
        u=(2*u)/(1+u)
    return u
```

   (b)

```python
def somme(p,n):
    s=0
    for i in range(p,n+1):
        s=s+suite(i)
    return s
```

(c)

```python
def seuil(a):
    u = 1/2
    n=0
    while u<=a:
        u=(2*u)/(1+u)
        n=n+1
    return n
```

2. **Étude de la fonction f**

   (a) $\boxed{D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}}$.

   (b) Soit $x \in D_f$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} = x \Leftrightarrow 2x = x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

   $\boxed{\text{Les points fixes de } f \text{ sont } 0 \text{ et } 1}$.

   (c) La fonction f est dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas et $\boxed{\forall x \in D_f,\ f'(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2}}$.

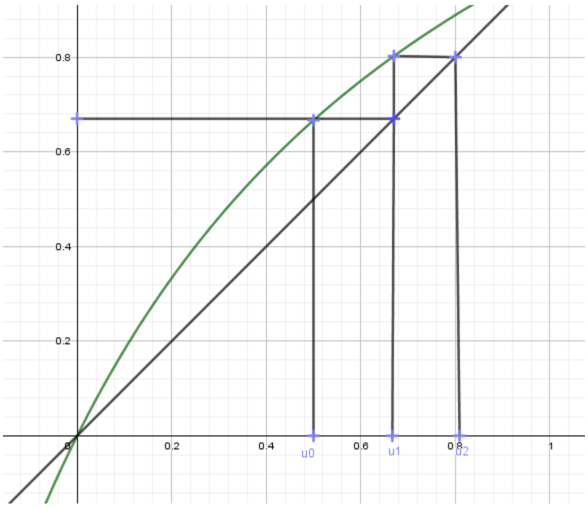
   De plus, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty}$.

   Enfin, $\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 2 \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2}$.

   Finalement, on obtient la tableau suivant

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	2

   (d) La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe.
   La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe.



   (e) Voir le graphe précédent.

(f) Soit $x \in [0,1]$. La fonction f est croissante sur $[0,1]$ donc $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$.
$f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ donc $0 \leq f(x) \leq 1$.
On a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x \in [0,1] \Longrightarrow f(x) \in [0,1]}$.

3. **Étude de la suite** (u_n)

(a) On raisonne par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$: "u_n existe et $u_n \in [0,1]$".

I Pour $n = 0$.
u_0 existe et $\dfrac{1}{2} \in [0,1]$. Donc $P(0)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.
$0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow u_n \neq -1$. Donc, $f(u_n)$ existe. Donc $\underline{u_{n+1}\text{ existe.}}$
De plus, $0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(u_n) \leq 1$ par la question 2.(f). Donc,$\underline{u_{n+1} \in [0,1].}$
Donc, $P(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \in [0,1]}$.

(b) On raisonne par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$: "$u_n \leq u_{n+1}$".

I Pour $n = 0$.
$\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{2}{3}$. Donc $P(0)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.
$u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ car la fonction f est croissante sur $[0,1]$. Donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
Donc, $P(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée. Par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle est convergente}}$.
On note ℓ sa limite.
De plus, puisque la fonction f est continue sur $[0,1]$, on sait que $f(\ell) = \ell$. Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.
Enfin, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} \leq u_n$. Donc, pas passage à la limite, $\dfrac{1}{2} \leq \ell$. Donc, $\boxed{\ell = 1}$.

4. **Expression de** u_n **en fonction de** n

(a) On raisonne par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N}$, "$u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$".

I Pour $n = 0$.
$u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2^0}{1+2^0} = \dfrac{1}{2}$. Donc $P(0)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.
$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{1+2^n}}{1+\frac{2^n}{1+2^n}} = \frac{2^{n+1}}{1+2^n}.\frac{1+2^n}{1+2.2^n} = \frac{2^{n+1}}{1+2^{n+1}}.$$
Donc, $P(n+1)$ est vraie.

C Par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n - 1 = \dfrac{2^n}{1+2^n} - 1 = \dfrac{2^n - 1 - 2^n}{1+2^n} = \dfrac{-1}{1+2^n}$.
Or, $1 + 2^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$ donc, par quotient et produit, $\boxed{u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -2^{-n}}$.

(c) On peut alors écrire $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} -2^{-n} + o(-2^{-n})$.
Finalement, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 - 2^{-n} + o(2^{-n})}$.

Exercice 3

Pour tout entier naturel non-nul n, on considère la fonction :

$$f_n : x \mapsto e^{-nx} - x$$

1. La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ car c'est la somme de deux fonctions dérivables (sur $\mathbb{R}$) donc sur $[0,1]$), et $\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) = -ne^{-nx} - 1 < 0$.
On en déduit que f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus, $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = e^{-}n - 1$, d'où le tableau de variation de f_n :

x	0		1
f_n	1	$\searrow$	$e^{-n}-1$

2. f_n est continue, strictement décroissante sur $[0,1]$, donc, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur son image $f_n([0,1]) = [e^{-n}-1, 1]$.
De plus, $0 \in [e^{-n}-1, 1]$ (ensemble d'arrivée de la bijection) puisque $-n < 0$ donc $e^{-n} < 1$.
Donc 0 admet un unique antécédent (appartenant à $[0,1]$) par f_n.
$\boxed{\text{Cela signifie qu'il existe un unique } x_n \in [0,1] \text{ tel que } f_n(x_n) = 0}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque. Soit $x \in [0,1]$ fixé quelconque.
$f_n(x)e^{-x} + x(e^{-x}-1) = (e^{-nx}-x)e^{-x} + xe^{-x} - x = e^{-nx}e^{-x} - x = e^{-(n+1)x} - x$ (c'est $f_{n+1}(x)$).
Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) = f_n(x)e^{-x} + x(e^{-x}-1)}$.

4. L'égalité précédente est vraie pour tout $x \in [0,1]$ donc elle est vraie en x_n. Donc $f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n)e^{-x_n} + x_n(e^{-x_n}-1)$. Or $f_n(x_n) = 0$, donc $f_{n+1}(x_n) = x_n(e^{-x_n}-1)$.
Or $x_n \in [0,1]$ donc $e^{-x_n} < 1$, donc $e^{-x_n} - 1 < 0$. Donc le produit $x_n(e^{-x_n}-1)$ est négatif. $\boxed{\text{Ainsi, } f_{n+1}(x_n) < 0}$.
On en déduit le tableau de variation de f_{n+1} dans lequel on place les points x_n et x_{n+1} :

x	0		x_{n+1}		x_n		1
f_n	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$f_{n+1}(x_n)$	$\searrow$	$e^{-n-1}-1$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque.
Si $x_n \leqslant x_{n+1}$, alors, comme f_{n+1} est décroissante sur $[0,1]$, on aurait $f_{n+1}(x_n) \leqslant f_{n+1}(x_{n+1})$, or ce n'est pas le cas puisque $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(x_n) < 0$. Donc $x_n > x_{n+1}$.
Ceci est vrai pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque donc c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. $\boxed{\text{Donc la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$.

6. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, minorée (par 0) donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{cette suite est converge}}$

7.
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n \leqslant 1 \end{cases}$$
Donc par passage à la limite dans l'inégalité, $\boxed{\ell \in [0,1]}$.

8. Nous avons vu que $\ell \in [0,1]$. Montrons par l'absurde que $\ell = 0$.
On suppose que $\ell \neq 0$. Donc $\ell \in]0,1]$. Donc $\ell > 0$.
Par définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = e^{-nx_n}$ $(*)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -nx_n = -\infty$. De plus, $\lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$. Donc par composition des limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx_n} = 0$. Or cette limite est la limite de (x_n) d'après $(*)$. Donc elle doit être égale à $\ell > 0$. Nous aboutissons à une contradiction. $\boxed{\text{Nous en déduisons donc que } \ell = 0}$.